Mat-1.159 Harmoninen analyysi ja ..., 4. harjoitus ma 19.2.1996 klo 12–14, U325 (3 sivua)

Tehtävä 4.1 ([Appendix] *helppo, nopea, hyvä*):
Olkoon $p^{-1}+q^{-1}=1$ ja $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^p(\mathbb{R}^d)$ s.e.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} u_n(x)v(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^d} u(x)v(x)\,dx\quad \forall v\in L^q(\mathbb{R}^d),$$

Osoita, että $\partial^\alpha u_n \underset{\mathcal{D}'}{\rightarrow} \partial^\alpha u\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^d$.

Vastaus: $T_n \underset{\mathcal{D}'}{\rightarrow} T$ tarkoittaa, että $\langle T_n,\phi\rangle\to\langle T,\phi\rangle\ \forall\phi\in\mathcal{D}$ (koska $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d):=\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^*$ heikko*-topologialla).[1] Olkoon $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

$$\langle\partial^\alpha T_{u_n},\phi\rangle:=(-1)^{|\alpha|}\langle T_{u_n},\partial^\alpha\phi\rangle:=(-1)^{|\alpha|}\int u_n\partial^\alpha\phi$$

(ja $\int u_n\partial^\alpha\phi\to\int u\partial^\alpha\phi$, koska $\partial^\alpha\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\subset L^q$)

$$\to(-1)^{|\alpha|}\int u\partial^\alpha\phi=:(-1)^{|\alpha|}\langle T_u,\partial^\alpha\phi\rangle=:\langle\partial^\alpha T_u,\phi\rangle.$$

Koska tämä pätee $\forall\phi\in\mathcal{D}$, $\partial^\alpha T_{u_n}\overset{*}{\rightharpoonup}\partial^\alpha T_u$, QED.

Tehtävä 4.2 (*työläs, tärkeä lemma*):
Näytä, että $\frac{x^\alpha}{\langle x\rangle^s}\in L^2(\mathbb{R}^d)$ joss $s>|\alpha|+d/2$.

Vastaus: $|x^\alpha|:=|\prod_{k=1}^d x_k^{\alpha_k}|=\prod_{k=1}^d|x_k|^{\alpha_k}\le\prod_{k=1}^d|x|^{\alpha_k}=x^{\sum_k\alpha_k}=:x^{|\alpha|}\le\sqrt{1+|x|^2}^{|\alpha|}=:\langle x\rangle^{|\alpha|}$.

1^o "$\Leftarrow$": $|x^\alpha/\langle x\rangle^s|\le 1/\langle x\rangle^{s-|\alpha|}$, joten riittää osoittaa, että $\langle x\rangle^{-t}\in L^2$, kun $t>d/2$.

[1]Seuraavassa — kuten usein muulloinkin — samaistetaan funktio u ja sen määräämä distribuutio $T_u:\phi\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}u\phi=:\langle T_u,\phi\rangle$; (huom.: $\partial^\alpha u$ (eli $\partial^\alpha T_u$) ei yleensä ole minkään funktion määräämä, kun $\alpha\neq 0$).

Lemma 0.0.1 *Olkoon $g:[0,\infty[\to[0,\infty]$ Borel-mitallinen funktio ja $f(x)=g(|x|)$. Tällöin $\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\,dx=\int_0^\infty g(r)a_dr^{d-1}\,dr\in[0,\infty]$, missä $a_d\in]0,\infty[$ on yksikköpallon (kuoren) $d-1$-ulotteinen mitta ("pinta-ala").*[2]

$$\|\langle x\rangle^{-t}\|_2^2:=\int_{\mathbb{R}^d}\langle|x|\rangle^{-2t}=\int_0^\infty\langle r\rangle^{-2t}a_dr^{d-1}\,dr=\int_0^1+a_d\int_1^\infty(1+r^2)^{-t}r^{d-1}\,dr$$

$$\le\int_0^1+a_d\int_1^\infty(r^2)^{-t}r^{d-1}\,dr\le\int_0^1+a_d\int_1^\infty r^{-2t+d-1}\,dr$$

$$=\int_0^1+a_d\Big|_1^\infty\frac{r^{-2t+d}}{d-2t}=\int_0^1+a_d\frac{1}{2t-d}<\infty,$$

koska $d-2t<0$ ja $\int_0^1<\infty$ (jatkuvalla funktiolla on maksimi kompaktissa joukossa).

2^o (Tämä tuskin on nopein tapa.)

$$\|x^\alpha/\langle x\rangle^s\|_2^2=\int_{-\infty}^\infty\ldots\int_{-\infty}^\infty|x_1|^{2\alpha_1}\ldots|x_d|^{2\alpha_d}\langle x\rangle^{-2s}\,dx_1\ldots dx_d=:I_d$$

$$\ge\int_{y_{d+1}}^\infty|x_d|^{2\alpha_d}\ldots\int_{y_2}^\infty|x_1|^{2\alpha_1}\langle x\rangle^{-2s}\,dx_1\ldots dx_d.$$

$y_k^2:=1+\sum_{j=k}^d x_j^2\ge 1$, jolloin $y_k^2=y_{k+1}^2+x_k^2$, joten $x_k\in]y_{k+1},\infty[\implies y_k^2<2x_k^2$. $\langle x\rangle^2=y_1^2$.

$$I_1:=\int_{y_2}^\infty x_1^{2\alpha_1}\langle x\rangle^{-2s}\,dx_1\ge\int_{y_2}^\infty x_1^{2\alpha_1}(2x_1^2)^{-s}\,dx_1=2^{-s}\int_{y_2}^\infty x_1^{2\alpha_1-2s}\,dx_1$$

[2]Tätä tärkeää lemmaa tarvitset luultavasti usein! Muista, että löydät sen tästä (tosin se on helppo muistaa: a_dr^{d-1} on r-säteisen pallon “ala”, esim. $a_1=2$, $a_2=2\pi$, $a_3=4\pi$, ... (kaikki $\mathbb{R}_+$:ssa; vastaavasti kuulan tilavuus on b_dr^d, missä $b_d\in]0,\infty[$)).
Tapauksessa $d=2$ todistus sujuisi napakoordinaattien ja tapauksessa $d=3$ pallokoordinaatien avulla; yleinen todistus saadaan helposti [R2:Exe8.6]:sta. Mm. paloittain jatkuvat funktiot ovat Borel-mitallisia. Jos tutkimasi funktio ei ole radiaalisymmetrinen (ts. $|x|$:n funktio), keksi sille sellainen majorantti tai minorantti tarpeittesi mukaan.
Tämän tehtävän tosin olisi voinut laskea ilmankin yo. lemmaa (vrt. 2^o).

$$= 2^{-s}\Big|_{y_2}^{\infty} x_1^{2\alpha_1-2s+1}/(2\alpha_1-2s+1) =: r_1 y_2^{2\alpha_1-2s+1}$$

(paitsi jos $2\alpha_1 - 2s + 1 \geq 0$, jolloin $I_1 = \infty$ ja näin ollen $I_2 = \int_{y_3}^{\infty} |x_2|^{2\alpha_2}\infty \geq \int_{y_3}^{\infty} 1 \cdot \infty = \infty$, $I_3 = ... = \infty$ ja induktiolla helposti $I_d = \infty$).

$$I_2 := \int_{y_3}^{\infty} x_2^{2\alpha_2} I_1\, dx_2 \geq \int_{y_3}^{\infty} x_2^{2\alpha_2} r_1 y_2^{2\alpha_1-2s+1}\, dx_2 r_1 \geq \int_{y_3}^{\infty} x_2^{2\alpha_2} (\sqrt{2}x_2)^{2\alpha_1-2s+1}\, dx_2$$

$$\geq r_1 \sqrt{2}^{2\alpha_1-2s+1} \int_{y_3}^{\infty} x_2^{2\alpha_2+2\alpha_1-2s+1}\, dx_2$$

$$\geq r_1 \sqrt{2}^{2\alpha_1-2s+1} \Big|_{y_3}^{\infty} x_2^{2\alpha_2+2\alpha_1-2s+2}/(2\alpha_2+2\alpha_1-2s+2) =: r_2 y_3^{2\alpha_2+2\alpha_1-2s+2}.$$

Induktiolla nähdään, että $I_k := \int_{y_{k+1}} x_k^{2\alpha_k} I_{k-1}\, dx_k \geq r_k y_{k+1}^{2\sum_{j=1}^{k}\alpha_k - 2s + 2}$, missä $r_k \in \mathbb{R}_+$.
Yo. laskuissa on aina oletettu $2\sum_{j=1}^{k}\alpha_k - 2s + k < 0$; jos jollain k tämä ei ole tosi, niin $I_k = \infty$ ja selvästi myös koko L^2-normi (eli I_d) on ääretön, siis ehto $0 > 2\sum_{j=1}^{d}\alpha_k - 2s + d = 2(|\alpha| + d/2 - s)$ on välttämätön, QED.

Tehtävä 4.3 ([s. 85] *helpohko, nopeahko, aika hyvä*):
Olkoon $P(D) = D^2 + aD + bI$, missä $D := i^{-1}\frac{d}{dx}$ (x-avaruutena $\mathbb{R}^1$). Olkoot $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ yhtälön $P(D)u = 0$ ratkaisuja ja $f(0) = g(0)$, $f'(0) = 1 + g'(0)$. $G(x) := f(x)\chi_{]-\infty,0]} + g(x)\chi_{]0,\infty[}$, $T\phi := -\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)G(x)\, dx$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Osoita, että T on operaattorin $P(D)$ perusratkaisu.

Vastaus: "$T \in \mathcal{D}'$ on operaattorin $P(D)$ perusratkaisu"tarkoittaa, että $P(D)T = \delta$ [Rauch:s. 85] (Rauch tosin puhuu $\mathcal{S}'$-perusratkaisuista). Ideana on se, että $P(D)(T * f) = (P(D)T) * f = \delta * f = f$, joten $T * f$ on yhtälön $P(D)u = f$ ratkaisu. Toisaalta $P(D)T = \delta$ (avaruuden $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alkioina) tarkoittaa, että $P(D)T(\phi) = \delta(\phi) := \phi(0)$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Lasketaan tämä:
Olkoon $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Valitaan $R > 0$ s.e. $\operatorname{supp}\phi \subset]-R, R[$.

$$\langle P(D)T, \phi\rangle = \langle D^2T, \phi\rangle + \langle aDT, \phi\rangle + \langle bT, \phi\rangle = \langle T, D^2\phi\rangle - a\langle T, D\phi\rangle + b\langle T, \phi\rangle$$

$$= -\int_{-R}^{R} G(x)[D^2\phi - aD\phi + b\phi]\, dx$$

$$= -\int_{-R}^{0} f(x)[D^2\phi - aD\phi + b\phi]\, dx - \int_{0}^{R} g(x)[D^2\phi - aD\phi + b\phi]\, dx.$$

$$\int_{-R}^{0} f(x)[D^2\phi - aD\phi]\, dx = i^{-1}\Big|_{-R}^{0} f(x)[D\phi(x) - a\phi(x)] - \int_{-R}^{0} Df(x)[D\phi(x) - a\phi(x)]$$

$$= i^{-1}f(0)[D\phi(0) - a\phi(0)] + \int_{-R}^{0} Df(x)a\phi(x) - \Big|_{-R}^{0} Df(x)\phi(x) + \int_{-R}^{0} D^2f(x)\phi(x)$$

$= i^{-1}f(0)[D\phi(0) - a\phi(0)] - i^{-1}Df(0)\phi(0) + \int_{-R}^{0}[D^2f(x) + aDf(x)]\phi(x)$,
vastaava lasku voidaan laskea g:llekin, jolloin saadaan

$$\langle P(D)T, \phi\rangle = i^{-1}[f(0) - g(0)][D\phi(0) - a\phi(0)] - i^{-1}[Df(0) - Dg(0)]\phi(0)$$

$$+ \int_{-R}^{0}[D^2f(x) + aDf(x) + bf]\phi(x) + \int_{0}^{R}[D^2g(x) + aDg(x) + bg]\phi(x)$$

$$= 0 - i^{-1}i\phi(0) + 0 + 0 = \phi(0), \quad \text{QED.}$$

(Huom.: sama pätee, jos $D := \partial := \frac{d}{dx}$ ja $f'(0) = -1 + g'(0)$; i^{-1}:n kuljetus laskuissa oli tietenkin kivutonta.)

Tehtävä 4.4 ([s. 101] *vaikeahko, keskipitkä*):
Todista [Rauch:Prop3.3.1] eli
Olkoon $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$. *Tällöin (i)* $\iff$ *(ii), missä*
(i) $u'(t) := \mathcal{S}\text{-}\lim_{h\to 0}[u(t+h) - u(t)]/h$ *on olemassa tasaisesti kussakin rajoitetussa* $E \subset \mathbb{R}$.
(ii) Osittaisderivaatta $u_t(t,x)$ *on olemassa* $\forall t, x$ *ja* $u_t(t,\cdot) \in \mathcal{S}$ $\forall t$ *sekä* $u_t \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$.
Lisäksi, jos (i) tai (ii) (siis molemmat), niin $u_t(t,\cdot) = u'(t)$ *ja* $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$.

Vastaus: (Huom. ao. todistus pätee, kun $\mathbb{R} \ni t$ korvataan millä tahansa joukolla $A \subset \mathbb{R}$.)

Kohdassa (i) $\lim_{h\to 0}[u(t+h)-u(t)]/h \to u'(t)$ tarkoittaa luonnollisesti $\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall h\ (|h|<\delta \implies \rho([u(t+h)-u(t)]/h, u'(t))<\epsilon)$. Toisaalta 1. harjoituksissahan todettiin, että tuo on ekvivalenttia sen kanssa, että $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d\ \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall h\ (|h|<\delta \implies \|[u(t+h)-u(t)]/h-u'(t)\|_{\alpha,\beta}<\epsilon)$.

Kohdassa (ii) ajatellaan u funktioksi $v:(t,x)\mapsto u(t)(x)$ (onhan $u(t)\in\mathcal{S}\ \forall t$). Esim. jos $f\in\mathcal{S}$, niin $u:t\mapsto e^{-it|\cdot|^2}\hat{f}(\cdot)$ on jatkuva $\mathbb{R}\to\mathcal{S}$, mikä nähdään pienellä laskulla (ii):stä. Tällöin $v:(t,x)\mapsto u(t)(x)=e^{-itx^2}\hat{f}(x)$ on jatkuva $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ (koska $\hat{f}\in\mathcal{S}\subset\mathcal{C}^\infty$) (vrt. [s. 104]).

VAIHE (i) $\implies$ (ii)

1^o $\exists u_t$: Olkoon $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$. (i):n perusteella $[u(t+h)-u(t)]/h-u'(t)\xrightarrow[\mathcal{S}]{}0$, joten

$$|[u(t+h)(x)-u(t)(x)]/h-u'(t)(x)|\le\sup_{y\in\mathbb{R}^d}|[u(t+h)(y)-u(t)(y)]/h-u'(t)(y)|$$

$$=:\|[u(t+h)-u(t)]/h-u'(t)\|_{0,0}\to 0,$$

siis $\exists u_t(t,x)=u'(t)(x)$. (i):n perusteella $u_t(t,\cdot)=u'(t)\in\mathcal{S}$. Pitää enää todistaa, että $u':\mathbb{R}\ni t\mapsto u'(t)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on jatkuva:

2^o $u'\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathcal{S})$: Olkoon $t\in\mathbb{R}$. Olkoon $\epsilon>0$ ja $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d$. Nyt on siis löydettävä $\delta>0$ s.e. $\forall t'\in\mathbb{R}\ (|t'-t|<\delta\implies\|u'(t')-u'(t)\|_{\alpha,\beta}<\epsilon$.

$E:=[t-1,t+1]$. Valitaan $\delta_1>0$ s.e. $s\in E\wedge|h|<\delta_1\implies\|h^{-1}[u(s+h)-u(s)]-u'(s)\|_{\alpha,\beta}<\epsilon/3$ [(i)]. $u'(s)\in\mathcal{S}$, joten myös $x^\alpha\partial_x^\beta u'(s)\in\mathcal{S}$, kuten aiemmissa laskuharjoituksissa todettiin. 1. harjoitusten mukaan $\mathcal{S}\subset\mathcal{C}_v$ ja $\mathcal{C}_v$-funktiot ovat tasaisesti jatkuvia, joten voidaan valita $\delta_2>0$ s.e. $|q|<\delta_2\implies|x^\alpha\partial_x^\beta u'(s)(t+q)-x^\alpha\partial_x^\beta u'(s)(t)|<\epsilon/4$. Olkoon nyt $|t'-t|<\delta:=\min(\delta_1,\delta_2,1)/2$. Valitaan vaikkapa $h=\delta/2$.

$$\|u'(t')-u'(t)\|_{\alpha,\beta}\le\|u'(t')-h^{-1}[u(t'+h)-u(t')]\|_{\alpha,\beta}$$

$$+\|h^{-1}[u(t'+h)-u(t')]-h^{-1}[u(t+h)-u(t)]\|_{\alpha,\beta}+\|h^{-1}[u(t+h)-u(t)]-u'(t)\|_{\alpha,\beta}$$

$$\le\epsilon/3+\|h^{-1}[x^\alpha\partial_x^\beta u(t'+h)-x^\alpha\partial_x^\beta u(t')]-h^{-1}[x^\alpha\partial_x^\beta u(t+h)-x^\alpha\partial_x^\beta u(t)]\|_\infty+\epsilon/3$$

(sovelletaan väliarvolausetta funktioihin $F_x(s):=x^\alpha\partial_x^\beta u(s,x)$ kullakin $x\in\mathbb{R}^d$, siis $F_x(s+h)-F_x(s)=hF_x'(s+q_{s,h,x})=x^\alpha\partial_x^\beta u_t(s+q_{s,h,x},x)=x^\alpha\partial_x^\beta u'(s+q_{s,h,x})(x))$[3]

$$\le\epsilon/3+\|x^\alpha\partial_x^\beta u'(t'+q_{t',h,x})(x)-x^\alpha\partial_x^\beta u'(t+q_{t,h,x})(x)\|_\infty+\epsilon/3<\epsilon/3+\epsilon/4+\epsilon/3<\epsilon$$

(koska $|(t'+q_{t',h,x})-(t+q_{t,h,x})|\le|t'-t|+q_{t',h,x}+q_{t,h,x}<\delta+\delta/2+\delta/2\le\delta_2$). Siinä tuli siis myös "*Lisäksi ... -väite todistettua.*

VAIHE (ii) $\implies$ (i) *Olkoon $E\subset\mathbb{R}$ rajoitettu. Olkoon $\epsilon>0$ ja $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d$. Etsitään näille $\delta>0$.*

Valitaan $R>1$ s.e. $E\subset[-(R-1),R+1]$. Koska jatkuva funktio on kompaktissa $[-R,R]$ tasaisesti jatkuva [R1], voidaan valita $\delta'>0$ s.e. $t,t'\in[-R,R]\wedge|t-t'|<\delta'\implies\|u_t(t')-u_t(t)\|_{\alpha,\beta}<\epsilon$. Olkoon $t\in E\wedge|h|<\delta:=\min(\delta',1)$.

$$\|[u(t+h)-u(t)]/h-u_t(t)\|_{\alpha,\beta}=\|[x^\alpha\partial^\beta u(t+h)-x^\alpha\partial^\beta u(t)]/h-x^\alpha\partial^\beta u'(t)\|_\infty$$

$$=\sup_x|[x^\alpha\partial^\beta u(t+h,x)-x^\alpha\partial^\beta u(t,x)]/h-x^\alpha\partial^\beta u_t(t,x)|$$

$$=\sup_x|x^\alpha\partial^\beta u_t(t+q_{t,h,x},x)-x^\alpha\partial^\beta u_t(t,x)|<\epsilon.$$

[3]Kyllä $s\mapsto x^\alpha u^{(\beta)}(s)(x)$ on derivoituva s:n suhteen. Se voidaan todistaa joko 1^o:een tapaan tai huomaamalla, että $T\in\mathcal{S}'$, missä $T:\phi\mapsto x^\alpha\phi^{(\beta)}(x)$ ja toteamalla, että $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},X)\wedge T\in X^*\implies Tf\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ jne.