Mat-1.159 Harmoninen analyysi ja ..., 3. harjoitus ma 12.2.1996 klo 12–14, U325 (4 sivua)

Tehtävä 3.1 (*keskitasoa, keskipitkä*):
Funktio $z \mapsto e^{itz}$ on kokonainen[1] (kiinteällä t). Olkoon $F \in L^2([-1,1])$. Osoita, että $f(z) := \int_{-1}^1 e^{itz}F(t)\,dt$ on kokonainen.

Vastaus: Tässä, kuten integraaleissa yleensäkin, analyyttisyyden todistaminen tapahtuu helpoiten Moreran lauseen avulla:

Moreran lause. Olkoon $\Omega \subset\!\!\!\circ\, \mathbb{C}$ ja $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. $f \in H(\Omega)$ joss $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ aina[2] kun $\Gamma \subset \Omega$ on kolmio. [R2:10.17]

(Yhtä hyvin "aina kun $\Gamma \subset \Omega$ on suorakulmio, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia"[Bruce P. Palka].)
Huom. $|e^{itz}| = |e^{it\operatorname{Re} z}e^{iti\operatorname{Im} z}| = |e^{it\operatorname{Re} z}||e^{-t\operatorname{Im} z}| = 1 \cdot e^{-t\operatorname{Im} z} \leq e^{|\operatorname{Im} z|} =: M_z \;\forall t \in [-1,1]$.

1^o Todistetaan f:n jatkuvuus mielivaltaisessa $z \in \mathbb{C}$:

$$|f(z+h) - f(z)| = |\int_{-1}^1 (e^{it(z+h)} - e^{itz})F(t)\,dt| = |\int_{-1}^1 (e^{ith}-1)e^{itz}F(t)\,dt|$$

$$\leq \int_{-1}^1 |(e^{ith}-1)e^{itz}F(t)|\,dt \overset{*}{\leq} [\int_{-1}^1 |(e^{ith}-1)e^{itz}|^2\,dt]^{1/2}\,\|F\|_{L^2([-1,1])}$$

$$\leq [\int_{-1}^1 (\epsilon')^2 \cdot M_z^2\,dt]^{1/2}\,\|F\|_{L^2([-1,1])} = \sqrt{2}\epsilon' M_z \|F\|_2 < \epsilon,$$

kun $|h| < \delta$, missä $\epsilon' = \epsilon'_{F,\epsilon,z} := \epsilon/(\sqrt{2}\|F\|_2 M_z + 1)$ ja $\delta = \delta_{F,\epsilon,z} > 0$ valitaan[3] s.e. $|h| < \delta \implies |e^{ith} - 1| < \epsilon'$. Siis f on jatkuva z:ssa.

[1]Funktio on **kokonainen** (*entire*) joss se on analyyttinen (eli holomorfinen) koko $\mathbb{C}$:ssä (siis $\in H(\mathbb{C})$).

[2]**Muista:** näistä alaviitteistä ei kannata paljon välittää!
$\int_\Gamma f(z)\,dz := \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$, kun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ on polun Γ paloittain jatkuvasti derivoituva esitys [R2:10.8(1)]. Tätä ei tarvitse nyt tietää.

[3]Selitys: $w \mapsto e^w$ on jatkuva, joten $\exists \delta' > 0$ s.e. $|w| < \delta' \Rightarrow \epsilon' > |e^w - e^0| = |e^w - 1|$. Jos $|h| < \delta'$, niin $|ith| = |th| \leq |h| < \delta'$; siis $\delta := \delta'$ kelpaa.

($*$: Hölderin epäyhtälö [R2:3.8]: $\|gh\|_1 \leq \|g\|_p\|h\|_q$,
kun $p,q \in [1,\infty] \wedge$ "$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$".)

2^o Todistetaan,että $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ mielivaltaisella kolmiolla $\Gamma \subset \mathbb{C}$:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \int_{-1}^1 e^{itz}F(t)\,dt\,dz \overset{Fubini^4}{=} \int_{-1}^1 \int_\Gamma e^{itz}F(t)\,dz\,dt$$

$$= \int_{-1}^1 F(t)[\int_\Gamma e^{itz}\,dz]\,dt \overset{e^{itz}\in H}{=} \int_{-1}^1 F(t)[0]\,dt = 0, \quad \text{QED.}$$

TAPA 2: Moreran lauseen sijaan voisi todistaa, että $\exists f'(z) = itf(z)\;\forall z$, ts. että $|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - itf(z)| \to 0\;\forall x$, mikä onnistuu esim. Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen [R3:1.34&9.3a] avulla. (Majorantti löytyy esim. väliarvolauseen avulla, vrt. tehtävä 3.4 (1^o).)

Tehtävä 3.2 ([s. 73] *vaikeahko, keskipitkä*):
Konvoluutio $(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$ toteuttaa $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ja $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_q$ $(p^{-1}+q^{-1} = 1 \wedge p,q \in [1,\infty])$. Osoita interpolaatiolla [Rauch:Th2.3.5], että $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$
(kun $p,q \in [1,\infty] \wedge r^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1 \geq 0$).

Vastaus: (Huom.: $\|f\|_p^p := \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p$ $(p < \infty)$; $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} |f|$.)
Olkoon $q \in [1,\infty]$ ja $g \in L^q$. $t := (1-q^{-1})^{-1} = q/(q-1)$, $B_0 := \|g\|_q =: B_1$, $Kf := f*g$.
Tällöin $\|Kf\|_q \leq \|f\|_1\|g\|_q = B_0\|f\|_1$ ja $\|Kf\|_\infty \leq \|f\|_t\|g\|_q = B_1\|f\|_t$.
Niinpä Rieszin–Thorinin lauseen [Rauch:2.3.5] (huom. painovirheet) perusteella

$$\|Kf\|_{s_\theta} \leq B_1^\theta B_0^{1-\theta}\|f\|_{r_\theta} = \|g\|_q^\theta\|g\|_q^{1-\theta}\|f\|_{r_\theta} = \|g\|_q\|f\|_{r_\theta},$$

kun $0 \leq \theta \leq 1$, $r_0 = 1$, $s_0 = q$, $r_1 = t$, $s_1 = \infty$ ja $\frac{1}{r^\theta} = \theta\frac{1}{r_1} + (1-\theta)\frac{1}{r_0} = \theta(1-\frac{1}{q}) + (1-\theta) = 1 - \theta/q$ (eli (merk. $p := r^\theta$) $\theta = (1-p^{-1})q$ ($*$)) sekä $\frac{1}{s^\theta} = \theta\frac{1}{s_1} + (1-\theta)\frac{1}{s_0} = (1-\theta)/q \overset{*}{=} q^{-1} - (1-p^{-1}) = q^{-1} + p^{-1} - 1$.
Tässä on siis oltava $1 \geq \theta = (1-p^{-1})q$ eli $1 - p^{-1} \leq q^{-1}$
eli $0 \leq q^{-1} - p^{-1} - 1 = \frac{1}{s^\theta} =: r^{-1}$, jotta olisi $\theta \in [0,1]$ (ja $p,q \in [1,\infty]$)[5]

[5]Siis jos p on liian pieni ($p^{-1} > q^{-1} - 1$), ei ole sellaista $\theta \in [0,1]$, että $p = r_\theta$.

Tällöin siis $\|f*g\|_r \le \|f\|_p\|g\|_q$, QED.

(Huom.[6] $f*g = g*f$.)

Tehtävä 3.3 ([s. 89] *vaikeahko, pitkähkö, kannattaa lukaista*):
Millä s:n arvoilla pätee $\chi_{[0,1]} \in H^s(\mathbb{R})$? Entä $\chi_{[0,1]\times[0,1]} \in H^s(\mathbb{R}^2)$?

Vastaus: (a) $f := \chi_{[0,1]} \in L^1$, joten $\hat f(\xi) := \gamma\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx = \gamma\int_0^1 e^{-ix\xi} = \gamma\Big|_0^1 \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} = \gamma\frac{e^{-i\xi}-1}{-i\xi}$, jos $\xi \ne 0$; $\hat f(0) = \gamma\int_0^1 1\cdot e^0\,dx = \gamma$ (ja $\hat f \in \mathcal{C}_v(\mathbb{R})$, koska $f \in L^1$). Nyt [Rauch:s. 89]

$$\|f\|_{H^s}^2 := \|\sqrt{1+\xi^2}^s \hat f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s|\hat f|^2$$

ja, koska $|\hat f(-\xi)| = |\hat f(\xi)|$,

$$= 2\int_0^\infty (1+\xi^2)^s|\hat f|^2 = 2\int_0^1 + 2\int_1^\infty .$$

Koska $\hat f$ on jatkuva (siis rajoitettu kompaktissa $[0,1]$), $\int_0^1 < \infty$. Nyt siis on laskettava, millä s on $\int_1^\infty (1+\xi^2)^{2s}|\hat f|^2 < \infty$.

1°
$$\int_1^\infty (1+\xi^2)^s|\hat f(\xi)|^2\,d\xi \le \int_1^\infty (1+\xi^2)^s\frac{4}{\xi^2} \le 4\int_1^\infty (2\xi^2)^s\frac{1}{\xi^2}$$

$$\le 4\cdot 2^s\int_1^\infty \xi^{2s}\frac{1}{\xi^2} = 2^{s+2}\int_1^\infty \xi^{2s-2} = 2^{s+2}\Big|_1^\infty \xi^{2s-1}/(2s-1) < \infty,$$

kun $2s-1<0$ eli $s<1/2$. Siis $f \in H^s(\mathbb{R})$ $\forall s < 1/2$.

2° Olkoon sitten $s \ge 1/2$. Tällöin

$$\int_1^\infty (1+\xi^2)^s|\hat f(\xi)|^2\,d\xi \ge \int_{2\pi}^\infty = \int_{\biguplus_{n=1}^\infty [2n\pi,(2n+2)\pi[}$$

($\int_{\biguplus_n E_n} g = \sum_n \int_{E_n} g$ [R2:1.29&1.18a]; $\uplus$ tarkoittaa erillisten joukkojen yhdistettä, se siis tarkoittaa muuten samaa kuin $\cup$ mutta kertoo lisäksi, että $n \ne m \Rightarrow E_n \cap E_m = \emptyset$)

$$= \sum_{n=1}^\infty \int_{[2n\pi,(2n+2)\pi[} (1+\xi^2)^s|\hat f(\xi)|^2\,d\xi > \sum_{n=1}^\infty \int_{[2n\pi+\pi/2,2n\pi+3\pi/2[} \xi^{2s}|\hat f(\xi)|^2\,d\xi$$

(nyt $|e^{i\xi}-1| > 1$, kun $\xi \in [2n\pi+\pi/2, 2n\pi+3\pi/2[$)

$$> \sum_{n=1}^\infty \gamma^2 \int_{[2n\pi+\pi/2,2n\pi+3\pi/2[} \xi^{2s}\frac{1}{\xi^2}\,d\xi$$

$$= \gamma^2 \sum_{n=1}^\infty \int_{[2n\pi+\pi/2,2n\pi+3\pi/2[} \xi^{2s-2}\,d\xi =: \gamma^2 I$$

Jos $2s-2 \ge 0$, niin

$$I > \sum_{n=1}^\infty \int_{[2n\pi+\pi/2,2n\pi+3\pi/2[} (2n\pi)^{2s-2} = \sum_{n=1}^\infty \pi(2n\pi)^{2s-2}$$

$$= \pi(2\pi)^{2s-2}\sum_{n=1}^\infty n^{2s-2} = \infty$$

jos kerran $2s-2 \ge 0$, ts. $s \in [1,\infty[$. Tapauksessa $s \in [1/2, 1[$ edellinen meneekin seuraavasti

$$I > \sum_{n=1}^\infty \int_{[2n\pi+\pi/2,2n\pi+3\pi/2[} (2(n+1)\pi)^{2s-2}$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \pi(2(n+1)\pi)^{2s-2} = \pi(2\pi)^{2s-2}\sum_{k=2}^\infty k^{2s-2} = \infty$$

koska tällöinkin $2s-2 \ge -1$. Siis $f \notin H^s$, kun $s \ge 1/2$.
Ergo: $\chi_{[0,1]} \in H^s(\mathbb{R})$ joss $s < 1/2$. [1^o&2^o]

[6] Sijoittamalla $z := x-y$ saadaan $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(x-z)\,dz = (g*f)(x)$ [R2:7.26] (jos laitat -1:n dz:n eteen, joudut kääntämään integraalin rajat ylösalaisin [R2:7.26(15)]; nämähän kumoavat toisensa).

(b) Lasketaan taas $\hat{g}$ ja katsotaan sitten, millä s on $\|g\|_{H^s}^2 < \infty$.
$g(x) := \chi_{[0,1]\times[0,1]}(x) = \chi_{[0,1]}(x_1)\chi_{[0,1]}(x_2) = f(x_1)f(x_2)$ (tässä $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$). Merkitään $\gamma_1 := (2\pi)^{-1/2}$, $\gamma_2 := (2\pi)^{-2/2} = \gamma_1\gamma_1$.

$$\hat{g}(\xi) := \gamma_2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ix\xi}\,dx_1\,dx_2$$

$$= \gamma_1 \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_1[\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)f(x_2)e^{-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}\,dx_1]\,dx_2$$

$$= \gamma_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2)e^{-ix_2\xi_2}\gamma_1[\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)e^{-ix_1\xi_1}\,dx_1]\,dx_2$$

$$= \gamma_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2)e^{-ix_2\xi_2}[\gamma_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)e^{-ix_1\xi_1}\,dx_1]\,dx_2$$

$$= \gamma_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2)e^{-ix_2\xi_2}[\hat{f}(\xi_1)]\,dx_2 = [\hat{f}(\xi_1)]\gamma_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2)e^{-ix_2\xi_2}\,dx_2 = [\hat{f}(\xi_1)]\hat{f}(\xi_2)$$

Sitten lasketaan normi:

$$\|g\|_{H^s}^2 := \|\sqrt{1+\xi^2}^s\hat{g}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2}(1+\xi^2)^s|\hat{g}|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}(1+\xi_1^2+\xi_2^2)^s|\hat{f}(\xi_1)|^2|\hat{f}(\xi_2)|^2\,d\xi_1\,d\xi_2 =: J.$$

$$\le \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|(1+\xi_1^2)(1+\xi_2^2)|^s|\hat{f}(\xi_1)|^2|\hat{f}(\xi_2)|^2\,d\xi_1\,d\xi_2$$

$$\le \int_{\mathbb{R}}(1+\xi_2^2)^s|\hat{f}(\xi_2)|^2[\int_{\mathbb{R}}(1+\xi_1^2)^s|\hat{f}(\xi_1)|^2\,d\xi_1]\,d\xi_2 = \|f\|_{H^s}^2 < \infty$$

(a)-kohdan perusteella, jos $s < 1/2$. Jos sitten $s \ge 1/2$, niin

$$J \ge \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|1+\xi_2^2|^s|\hat{f}(\xi_1)|^2|\hat{f}(\xi_2)|^2\,d\xi_1\,d\xi_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}|1+\xi_2^2|^s|\hat{f}(\xi_2)|^2[\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\xi_1)|^2\,d\xi_1]\,d\xi_2$$

$$\ge \|\hat{f}\|_2^2\int_{-\infty}^{\infty}|1+\xi_2^2|^s|\hat{f}(\xi_2)|^2\,d\xi_2 = \|\hat{f}\|_2^2\|f\|_{H^s}^2 = \infty$$

(a)-kohdan perusteella. Siis jälleen $\chi_{[0,1]\times[0,1]} \in H^s(\mathbb{R}^2)$ joss $s < 1/2$.

Tehtävä 3.4 ([s. 88] *vaikeahko, pitkähkö, 2º tärkeä*):
Päteekö $\delta_h T \underset{S'}{\to} T'$, kun $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ja $\delta_h := \frac{1}{h}(\tau_{-h} - I)$?

Vastaus: 1º $\delta_h\phi \underset{S}{\to} \phi'$ $\forall\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (todistetaan alempana).
2º Varsinainen todistus ($T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$):

$$\langle\delta_h T, \phi\rangle := \langle\frac{1}{h}(\tau_{-h}T - T), \phi\rangle = \frac{1}{h}\langle(\tau_{-h}T - T), \phi\rangle = \frac{1}{h}[\langle\tau_{-h}T, \phi\rangle - \langle T, \phi\rangle]$$

$$= \frac{1}{h}[\langle T, \tau_h\phi\rangle - \langle T, \phi\rangle] = -\frac{1}{-h}[\langle T, \tau_{-(-h)}\phi - \phi\rangle] = -\langle T, \delta_{-h}\phi\rangle \to \langle T, \phi'\rangle,$$

koska $\delta_{-h}\phi \to \phi'$ [1º], kun $-h \to 0$ (eli $h \to 0$), QED.[7]

1º Olkoon $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\delta_h f \underset{S}{\to} f'$ tarkoittaa, että $\|\delta_h f - f'\|_{\alpha,\beta} \to 0$ $\forall\alpha,\beta$. Todistetaan tämä: Olkoon $\epsilon > 0$, koitetaan löytää $\delta > 0$ s.e. seuraava saadaan epsilonin alle:

$$\|\delta_h f - f'\|_{\alpha,\beta} = \|\frac{1}{h}(\tau_{-h}f - f) - f'\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha\partial^\beta[\frac{1}{h}(\tau_{-h}f - f) - f']\|_\infty$$

$$= \|x^\alpha[\frac{1}{h}(\tau_{-h}f^{(\beta)} - f^{(\beta)}) - f^{(\beta+1)}]\|_\infty$$

$$:= \sup_{x\in\mathbb{R}}|x^\alpha[\frac{1}{h}(f^{(\beta)}(x+h) - f^{(\beta)}(x)) - f^{(\beta+1)}(x)]|$$

ja väliarvolauseen perusteella $\frac{1}{h}(g(x+h) - g(x)) = g'(x + q_{x,h})$, jollain $q_{x,h} \in]0, h[$, joten (sij. $g := f^{(\beta)}$)

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}}|x^\alpha[f^{(\beta+1)}(x + q_{x,h}) - f^{(\beta+1)}(x)]|$$

[7] Muistathan, että $\psi_n \underset{S}{\to} \psi \implies \langle T, \psi_n\rangle \to \langle T, \psi\rangle$ (tätähän T:n jatkuvuus heikko*-topologiassa tarkoittaa). Siis $\langle T, \delta_{-h_n}\phi\rangle \to \langle T, \phi'\rangle$, kun $h_n \to 0$, koska tällöinhän $\delta_{-h_n}\phi \to \phi'$ [1º]. Koska tämä pätee aina kun $h_n \to 0$, on $\langle T, \delta_{-h}\phi\rangle \to \langle T, \phi'\rangle$ kun $h \to 0$ [R1:4.2].

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} |[x^\alpha f^{(\beta+1)}](x+q_{x,h}) - [x^\alpha f^{(\beta+1)}](x)]| =: A_{\alpha,\beta,h,f}$$

Edellisten harjoitusten [teht2.2:lemma] perusteella $F := x^\alpha f^{(\beta+1)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (ja $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_v(\mathbb{R})$), joten voidaan valita $R > 1$ s.e. $|x| > R-1 \implies |F(x)| < \epsilon/5$.
Jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa, joten voidaan valita $\delta' > 0$ s.e. $x, y \in \bar{B}_R := \{x \mid |x| \leq R\} \wedge |x-y| < \delta' \implies |F(x) - F(y)| < \epsilon/2$. $\delta := \min(1, \delta')$.

Jos nyt $|h| < \delta$, niin $|q_{x,h}| < \delta\ \forall x \in \mathbb{R}$ ja niinpä[8] $|F(x+q_{x,h}) - F(x)| < \epsilon/2\ \forall x \in \mathbb{R}$, joten $\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x+q_{x,h}) - F(x)]| \leq \epsilon/2 < \epsilon$, QED.

(Huom. vastaava pätee myös $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:ssä ja $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:ssä, todistukset ovat samanlaisia).

[8](i) Jos $x + q_{x+h}, x \in \bar{B}_R$, niin homma on selvä.
(ii) Ellei, niin kumpikaan ei ole B_{R-1}:ssä (koska $|q_{x+h}| < \delta \leq 1$) ja niinpä $|F(x+q_{x+h}) - F(x)| \leq |F(x+q_{x+h})| + |-F(x)| < \epsilon/5 + \epsilon/5 < \epsilon/2$.