Mat-1.159 Harmoninen analyysi ja ..., 2. harjoitus ma 5.2.1996 klo 12–14, U325 (3 sivua)

Tehtävä 2.1 ([s. 72] *helpohko, nopeahko, aika tärkeä*):
Näytä, että Parsevalin kaava on voimassa eli
(tässä $\mathcal{F}f := \hat{f} := \gamma \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$):

$$(f,g) := \int_{\mathbb{R}^d} f\bar{g}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}\overline{\hat{g}}\,dx =: (\hat{f},\hat{g}) \quad \forall f,g \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Vastaus: Tässä $(f,g) := (f,g)_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^d} f\bar{g}$ on L^2-sisätulo.
TAPA 1:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\bar{\hat{g}}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} [\gamma \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix\xi}\,dx]\bar{\hat{g}}(\xi)\,d\xi = \gamma \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\bar{\hat{g}}(\xi)e^{-ix\xi}\,dx\,d\xi$$

$$\overset{Fubini}{=} \gamma \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\bar{\hat{g}}(\xi)e^{-ix\xi}\,d\xi\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)[\int_{\mathbb{R}^d} \gamma\bar{\hat{g}}(\xi)e^{-ix\xi}\,d\xi]\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)[\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\gamma\hat{g}(\xi)e^{+ix\xi}}\,d\xi]\,dx \overset{*}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)[\overline{\gamma \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(\xi)e^{+ix\xi}\,d\xi}]\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)[\overline{\mathcal{F}^*\hat{g}(x)}]\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)[\overline{g(x)}]\,dx, \quad \text{QED.}$$

Fubini: $\int\int F(x,y)\,dx\,dy = \int\int F(x,y)\,dy\,dx$ [R2:8.8], kun $\int\int |F(x,y)|\,dx\,dy < \infty$ (ja $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ on tulomitallinen, jollaisia yhden muuttujan mitalliset funktiot (f ja $\hat{g}$) ja jatkuvat funktiot $e^{-ix\xi}$ sekä mitallisten funktioiden tulot [R2:Ch1] aina ovat; mikäli et oikein tunne mitallisuusasioita, oleta tässä kurssissa kaikki funktiot mitallisiksi ja perehdy asiaan vasta jossain toisessa kurssissa (esim. Reaalianalyysi)).
$*$: $\int \overline{h(x)}\,dx = \overline{\int h(x)}$, koska $\int[\operatorname{Re} h(x) - i\operatorname{Im} h(x)]\,dx = \int \operatorname{Re} h(x) - i\int \operatorname{Im} h(x) = \operatorname{Re}\int h(x) - i\operatorname{Im}\int h(x) = \overline{\operatorname{Re}\int h(x) + i\operatorname{Im}\int h(x)} =: \overline{\int h(x)}$.

TAPA 2: 1^o $(\mathcal{F}\phi,\psi) = (\phi,\mathcal{F}^*\psi)$ $\forall\phi,\psi \in \mathcal{S}$ [Rauch:2.2(8),s. 67]. Toisaalta molemmat puolet ovat jatkuvia funktioita, joten sama pätee $\forall\phi,\psi \in L^2$.[1]
2^o Jos nyt $f,g \in L^2$, niin $\mathcal{F}g \in L^2$ ja niinpä 1^o:n perusteella (merk. $\phi := f,\ \psi := \mathcal{F}g$) $(\mathcal{F}f,\mathcal{F}g) = (f,\mathcal{F}^*\mathcal{F}g) = (f,g)$, QED.

Tehtävä 2.2 ([s. 64] *keskitasoa, pitkähkö, aika tärkeä*):
Näytä, että jos $M \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ ja $\forall\alpha \in \mathbb{N}^d\ \exists N_\alpha, c_\alpha$ s.e. $|\partial^\alpha M| \le c_\alpha(1+|x|^{N_\alpha})$, niin $f \in \mathcal{S} \implies Mf \in \mathcal{S}$.
(Huom.: siis $\mathcal{S}$-funktioita saa kertoa polynomeilla, $\mathcal{S}$-funktioilla yms.)

Vastaus: Leibnizin kaava

$$\partial^\beta(fg) = \sum_{\zeta\le\beta} \binom{\beta}{\zeta} \partial^\zeta f \partial^{\beta-\zeta} g,$$

kun $f,g \in \mathcal{C}^\infty$ (tai edes em. osittaisderivaatat ovat olemassa), voidaan todistaa induktiolla [R3:6.15]. (Esim. $\mathbb{R}^1$:ssä $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.)
Merkitään $a_{\beta,\zeta} := \binom{\beta}{\zeta}$.

Olkoon $p_N(x) := (1+x^2)^N$ (tässä $x^2 := x \bullet x := \sum_k x_k^2 = |x|^2$). Nyt $|x|^n \le (1+|x|^2)^n \le (1+|x|^2)^N = (1+x^2)^N =: p_N(x)$, kun $n,N \in \mathbb{N} \wedge n \le N$ (tod.: $|x| \le 1$: selvästi; $|x| > 1$: selvästi).

Lemma Olkoon $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ja olkoon $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ polynomi sekä $\zeta \in \mathbb{N}^d$. Tällöin $\partial^\zeta f, pf, p\partial^\zeta f \in \mathcal{S}$.
Todistus: (a) $\partial^\zeta f \in \mathcal{C}^\infty$ ja $\|\partial^\zeta f\|_{\alpha,\beta} = \|x^\alpha\partial^\beta\partial^\zeta f\|_\infty = \|x^\alpha\partial^{\beta+\zeta} f\|_\infty =$

[1] Jos kahden jatkuvan kuvauksen arvot ovat samoja tiheässä joukossa, niin ne ovat samoja koko avaruudessa (tärkeää!!!):
$A(\phi) = B(\phi)\ \forall\phi \in \mathcal{S} \implies A(f) = B(f)\ \forall f \in L^2$, koska $A(f) = \lim_n A(f_n) = \lim_n B(f_n) = B(f)$, kun $\mathcal{S} \ni f_n \to f \in L^2$.
(Tässä todistus perustui jonotiheyteen ja jonojatkuvuuteen, jotka ovat ekvivalentteja tiheyden ja jatkuvuuden kanssa metrisissä avaruuksissa (kuten L^2).)
Siis $(\mathcal{F}f,\psi) = (f,\mathcal{F}^*\psi)$, kun $f \in L^2 \wedge \psi \in \mathcal{S}$ (niin sisätulo kuin $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{F}^*$ ovat jatkuvia). Vastaavasti ψ voidaan korvata jollain $g \in L^2$.

$\|f\|_{\alpha,\beta+\zeta} < \infty \ \forall \alpha, \beta$.
(b) 1^o Jos p on polynomi ($p(x) = \sum_{|\eta|\le N} b_\eta x^\eta$), niin $\|p(x)f\|_\infty$
$= \sup_x |\sum_{|\eta|\le N} b_\eta x^\eta f(x)| \le \sup_x \sum_{|\eta|\le N} |b_\eta||x^\eta f(x)| \le \sum_{|\eta|\le N} |b_\eta|\|f\|_{0,\eta} < \infty$.
2^o Jos $p(x) = \sum_{|\eta|\le N} b_\eta x^\eta$, niin $x^\alpha \partial^\beta [p(x)f(x)] = x^\alpha \sum_{\zeta\le\beta} a_{\beta,\zeta} p^{(\zeta)}(x) f^{(\beta-\zeta)}(x) = \sum_{\zeta\le\beta} a_{\beta,\zeta} x^\alpha p^{(\zeta)}(x) f^{(\beta-\zeta)}(x)$. Koska jokainen $a_{\beta,\zeta} x^\alpha p^{(\zeta)}$ on polynomi ja $f^{(\beta-\zeta)} \in \mathcal{S}$ [(a)], niin $\sup_x |a_{\beta,\zeta} x^\alpha p^{(\zeta)}(x) f^{(\beta-\zeta)}(x)| < \infty$, joten myös tällaisten summan sup$< \infty$, ts. $\|pf\|_{\alpha,\beta} = \|x^\alpha \partial^\beta [p(x)f(x)]\|_\infty < \infty$, siis $pf \in \mathcal{S}$.
(c) Seuraa kohdista (a) ja (b), QED.

Nyt voidaan laskea $\|Mf\|_{\alpha,\beta}$: $\quad |x^\alpha \partial^\beta [M(x)f(x)]|$

$$= |x^\alpha \sum_{\zeta\le\beta} a_{\beta,\zeta} M^{(\zeta)}(x) f^{(\beta-\zeta)}(x)| \le \sum_{\zeta\le\beta} |x^\alpha a_{\beta,\zeta} M^{(\zeta)}(x) f^{(\beta-\zeta)}(x)|$$

$$\le \sum_{\zeta\le\beta} |x^\alpha| a_{\beta,\zeta} c_\zeta (1+|x|^{N_\zeta}) |f^{(\beta-\zeta)}(x)| \le \sum_{\zeta\le\beta} |x^\alpha a_{\beta,\zeta} c_\zeta p_{N_\zeta}(x) f^{(\beta-\zeta)}(x)|$$

$$\le \sum_{\zeta\le\beta} \|q_{\alpha,\beta,\zeta} f^{(\beta-\zeta)}\|_\infty \overset{Lemma}{<} \infty,$$

missä $q_{\alpha,\beta,\zeta} := x^\alpha a_{\beta,\zeta} c_\zeta p_{N_\zeta}(x)$. Siis $Mf \in \mathcal{S}$, koska $\|Mf\|_{\alpha,\beta} < \infty \ \forall \alpha, \beta$.[2]

Tehtävä 2.3 ([s. 251] *helpohko, nopeahko, aika tärkeä*):
$u(x) := \chi_{\mathbb{R}_+}(x) \ln x$. (a) Onko u lokaalisti integroituva, ts. onko $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ eli $\int_K |u| < \infty$ kaikilla kompakteilla $K \subset^K \mathbb{R}$? (b) Jos on, määrää u:n distribuutioderivaatta.

Vastaus: (a) u on paloittain jatkuva, siis mitallinen, joten $u \in L^1_{loc}$ joss $\int_K |u| < \infty \ \forall K \subset^K \mathbb{R}$. Olkoon $K \subset^K \mathbb{R}$ mielivaltainen. $\mathbb{R}^d$:n kompaktit joukot ovat suljetut ja rajoitetut joukot, joten $\exists R > 0$ s.e. $K \subset B_R := \{x \mid |x| < R\}$.

$$\int_K |u| \le \int_{B_R} |u| = \int_{-R}^R |u| = 0 + \int_0^R |\ln x| \, dx$$

$$= \int_0^1 -\ln x + \int_1^R \ln x = \Big|_0^1 - (x\ln x - x) + \Big|_1^R (x \ln x - x)$$

$$= [-(0-1) -^- 0] + [(R\ln R - R) - (0-1)] = R(\ln R - 1) + 2 < \infty.$$

Siis $u \in L^1_{loc}$.

(b) Tässä, kuten yleensä, samaistetaan funktio $u \in L^1_{loc}$ ja sen määräämä distribuutio $T_u : \phi \mapsto \int_\mathbb{R} u\phi =: \langle u, \phi \rangle$. (Tässä siis $T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) := \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ ja $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) := \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$).
Olkoon $\phi \in \mathcal{D}$. Koska ϕ:n kantaja $\operatorname{supp}\phi := \overline{\{x \mid \phi(x) \ne 0\}}$ on kompakti, voidaan valita $R \in \mathbb{R}_+$ s.e. $\phi(x) = 0 \ \forall x \ge R$ (jolloin tietysti $\phi'(x) = 0 \ \forall x \ge R$). Nyt [Rauch:s. 251]

$$\langle \partial T_u, \phi \rangle := -\langle T_u, \phi' \rangle := -\int_\mathbb{R} u\phi' = -\int_0^R u\phi' = -\int_0^R \ln x \, \phi'(x) \, dx$$

$$= -\int_0^1 \ln x \, \phi'(x)\, dx - \int_1^R \ln x \, \phi'(x) \, dx =: -I_1 - I_2.$$

Tässä välissä osittaisintegroidaan, kuitenkin I_1:ssä ϕ':n antiderivaataksi ei kannata valita ϕ:tä, koska tällöin sijoitus olisi $+\infty$ ja integraali $-\infty$ (tai pv.), joten käytetään antiderivaattaa $[\phi(x) - \phi(0)]$.

$$I_1 = \Big|_0^1 \ln x \, [\phi(x) - \phi(0)] - \int_0^1 \frac{1}{x}[\phi(x) - \phi(0)] \, dx = 0 - \int_0^1 \frac{1}{x}[\phi(x)-\phi(0)] \, dx,$$

koska $\lim_{x\to 0+} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{(\ln x)^{-1}} = 0$ [Hospital].

$$I_2 = \Big|_1^R \ln x \, \phi(x) - \int_1^R \frac{1}{x}\phi(x) \, dx = 0 - \int_1^R \frac{1}{x}\phi(x)\, dx.$$

$$\langle \partial T_u, \phi \rangle = -I_1 - I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x}[\phi(x) - \phi(0)] \, dx + \int_1^R \frac{1}{x}\phi(x) \, dx$$

[2] Yo. laskelmista voisi nähdä, että $\|Mf\|_{\alpha,\beta}$ saadaan mielivaltaisen pieneksi vaatimalla tietyt f:n seminormit (vain äärellisen monta, kun tiedetään α ja β) riittävän pieniksi, niinpä kuvaus $f \mapsto Mf$ on jatkuva ($\in \mathcal{L}(\mathcal{S})$), mikä nähdään sijoittamalla $f = g_n - g$ tms. [Rauch:Exe2.1.3i]

$$= \int_0^1 \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}\, dx + \int_1^\infty \frac{\phi(x)}{x}\, dx.$$ [3]

Tehtävä 2.4 ([s. 78] *helpohko, nopeahko, aika tärkeä*):
Olkoon $u(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$). Tällöin $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, joten sillä on $\mathcal{S}'$-Fourier-muunnos. Laske se.

Vastaus: (Mm. jokainen polynomi on $\in \mathcal{S}'$ [Rauch:s. 75].)
$\langle \hat{T}, \phi \rangle := \langle T, \hat{\phi} \rangle\ \forall \phi \in \mathcal{S}$, kun $u \in \mathcal{S}'$ [Rauch:s. 78]. Niinpä $\langle \hat{\delta}, \phi \rangle := \langle \delta, \hat{\phi} \rangle := \hat{\phi}(0) := \gamma \int \phi(x) e^{-i0x}\, dx = \int \gamma\phi = \langle \gamma, \phi \rangle\ \forall \phi$, joten $\hat{\delta} = \gamma := (2\pi)^{-d/2}$ (vakiofunktio).

Niinpä $\delta = \mathcal{F}^*\gamma = \mathcal{F}\mathcal{R}\gamma = \mathcal{F}\gamma$ ja $\gamma^{-1}\delta = \gamma^{-1}\mathcal{F}\gamma = \mathcal{F}1$. Nyt $\mathcal{F}\partial^\alpha T = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}T \wedge \mathcal{F}(x^\alpha T) = (i\partial)^\alpha \mathcal{F}T\ \forall T \in \mathcal{S}'$ [Rauch:s. 78,s. 66].[4] Niinpä $\mathcal{F}x^2 = (i\partial)^2 \mathcal{F}1 = (i\partial)^2 \gamma^{-1}\delta = -\gamma^{-1}\partial^2\delta = -\gamma^{-1}\delta''$; viime harjoituksesta muistamme, että $\delta''(\phi) := \phi''(0)$, joten $\langle \mathcal{F}x^2, \phi \rangle = \langle -\gamma^{-1}\delta'', \phi \rangle = -\gamma^{-1}\phi''(0)$.

[3] Vain niille, joita L^p_{loc}-avaruudet kiinnostavat erityisesti:
Voidaan todistaa, että jos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, niin $f = 0$ m.k. $\iff \int f\phi = 0\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, joten tällä samaistuksella $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ on injektio (voidaan todistaa, että se on peräti upotus eli jatkuva lineaarinen injektio).

$L^p_{loc}(\Omega) := \{f \in L(\Omega) \,|\, f_{|_K} \in L^p(K)\ \forall K \subset^K \Omega\}$, kun $\Omega \subset^\circ \mathbb{R}^d$. Tässä $L(\Omega)$ on mitallisten funktioiden $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ekvivalenssiluokkien joukko ja $\subset^K$ tarkoittaa kompaktia, $\subset^\circ$ avointa ja $\subset^c$ suljettua osajoukkoa. Siis $f \in L^p_{loc}(\Omega) \iff \int_K |f|^p < \infty\ \forall K \subset^K \Omega$, jos $p < \infty$.
Selvästi $L^p \subset L^p_{loc} \subset L^1_{loc}$, kun $1 \le p \le \infty$ (koska $1\chi_K \in L^q$ ja Hölderin epäyhtälö $\int |fg| \le \|f\|_p \|g\|_q$ pätee tietenkin myös $L^1(K)$:ssa).
Avaruuden $L^p_{loc}(\Omega)$ topologia määritellään $\|f_{|_K}\|_{L^p(K)}$-seminormien avulla (voidaan tyytyä $\|f_{|_{K_n}}\|_{L^p(K_n)}$-seminormeihin ($n \in \mathbb{N}_+$)), kun valitaan $K_n := \{x \in \Omega \,|\, |x| < n \wedge d(x, \Omega^c) < 1/n\}$ tms. (jolloin $K_1 \subset^K K_2 \subset^K \ldots \wedge \Omega = \cup_n K_n$) ja saada näin numeroituva määrä seminormeja, siis metristyvä topologia, kuten $\mathcal{S}$:ssäkin), jolloin em. inkluusiot ovat jatkuvia (upotuksia).
Voidaan myös todistaa, että $\mathcal{D}(\Omega)$ on tiheä kaikissa em. avaruuksissa, ellei $p = \infty$. Selvästi $\mathcal{C} \subset L^p_{loc}\ \forall p$.

[4] Kuten tehtävän 2.1 alaviitteessä todettiin, jos $A(\phi) = B(\phi)\ \forall \phi \in \mathcal{S}$ ja A ja B ovat jonojatkuvia $\mathcal{S}'$:ssä (esim. saatu yhdistelemällä lauseessa [Rauch:Th2.4.5] jonojatkuviksi todettuja kuvauksia), niin $A(T) = B(T)\ \forall T \in \mathcal{S}'$ (tämä todetaan [Rauch:s. 78]:ssa). Niinpä $(\mathcal{F}\mathcal{R})\mathcal{F}T = \mathcal{F}^*\mathcal{F}T = T\ \forall T \in \mathcal{S}'$ jne.

Tehtävä 2.5 ([s. 253] *keskitasoa, keskipitkä*):
(a) Todista: Jos $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$, niin $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} T_f$ [Rauch:s. 253], missä T_f on distribuutio $\phi \mapsto \int f\phi$.
(b) Päteekö sama, kun $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$?

Vastaus: $T_{|_\Omega} = 0$ tarkoittaa, että $\langle T, \phi \rangle = 0\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, kun $\Omega \subset^\circ \mathbb{R}^d$ [Rauch:s. 253].
$\operatorname{supp} T := (\cup\{\Omega \,|\, T_{|_\Omega} = 0\})^c$ [Rauch:s. 253]; siis sen komplementti on niiden x joukko, joilla on ympäristö $V \subset^\circ \mathbb{R}^d$, jossa $T = 0$.

(b) Olkoon $f = \chi_{\{0\}}$. Tällöin $\langle T_f, \phi \rangle := \int f\phi = 0\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, joten $T_{f|_{\mathbb{R}^d}} = 0$, siis $\operatorname{supp} T_f = \emptyset$, vaikka $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \,|\, f(x) \ne 0\}} = \overline{\{0\}} = \{0\}$.[5]

(a) Olkoon $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.
1^o $\operatorname{supp} T_f \subset \operatorname{supp} f$: Olkoon $V := (\operatorname{supp} f)^c \subset^\circ \mathbb{R}^d$. Selvästi T_f on nolla joukossa V (jos $\phi \in \mathcal{D}(V)$ eli $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d) \wedge \operatorname{supp} \phi \in V$, niin $\langle T_f, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f\phi = \int_V f\phi = \int_V 0\phi = 0$). Niinpä $(\operatorname{supp} f)^c = V \subset (\operatorname{supp} T_f)^c$ eli $\operatorname{supp} T_f \subset \operatorname{supp} f$.

2^o $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{supp} T_f$: Olkoon $r := f(x) > 0$. $U := \{y \,|\, \operatorname{Re} f(y) > r/2\} = (\operatorname{Re} f)^{-1}]r/2, \infty[\, \subset^\circ \mathbb{R}^d$ (koska avoimen joukon alkukuva jatkuvalla funktiolla on avoin). Olkoon V pisteen x ympäristö (ts. $x \in V \subset^\circ \mathbb{R}^d$) ja $W := V \cap U \subset^\circ \mathbb{R}^d$. Valitaan $\phi \in \mathcal{D}(W)$ s.e. $\phi(x) = 1 \wedge \phi_{|_{W^c}} = 0 \wedge 0 \le \phi \le 1$ [Rauch:Exe2.3.1]. Tällöin $\operatorname{Re} \int f\phi = \int_W \operatorname{Re} f\phi \ge \int_W \frac{r}{2}\phi > 0$, joten $\langle T_f, \phi \rangle := \int f\phi \ne 0$, siis T_f ei ole nolla joukossa V. Niinpä $x \in \operatorname{supp} T_f$.
Jos sitten $f(x) \ne 0$, niin $\alpha f(x) > 0$, kun $\alpha := |f(x)|/f(x)$. Valitaan ϕ funktiolle $\alpha f \in \mathcal{C}$ kuten edellä. Tällöin $\langle T_f, \alpha\phi \rangle = \int f\alpha\phi = \int (\alpha f)\phi \ne 0$, joten tällöinkään T_f ei ole nolla joukossa V, kun V on jokin x:n ympäristö.
Siis $\{x \,|\, f(x) \ne 0\} \subset \operatorname{supp} T_f$. Toisaalta $\operatorname{supp} T_f$ on suljettu (koska se on avoimen joukon komplementti), joten $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \,|\, f(x) \ne 0\}} \subset \operatorname{supp} T_f$

[5] Uteliaille: Tässähän $f = 0$ m.k.. Yleensäkin voidaan aina poimia f:n ekvivalenssiluokasta g (ts. $g = f$ m.k.) s.e. $\operatorname{supp} g = \operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} T_g$, esim. $g(x) := f(x)\chi_{\operatorname{supp} T_f}(x)$, koska $f_{|_{(\operatorname{supp} T_f)^c}} = 0$ m.k., minkä todistaminen (ei aivan helppoa) onnistuu, koska $\mathcal{D}$ on tiheä $\mathcal{C}_c$:ssä (todistus sivuutetaan).