Mat-1.159 Harmoninen analyysi ja ..., 10. harjoitus ma 1.4.1996 klo 12–14, U325 (2 sivua)

Harjoituksista 9 alkaen käsitellään klassikkoa Elias M. Stein: "Harmonic Analysis", Princeton University Press, 1993.

Tehtävä 10.1 ([s. 353] *helpohko, nopeahko*):
Osoita, että sivun 353 operaattorit R ja R^* ovat toistensa adjungaatteja siinä mielessä, että $\langle Rf, Rf\rangle_{L^2(S,d\mu)} = \langle R^*Rf, f\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in \mathcal{S}$.
Tässä $Rf(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi ix\xi} f(x)\,dx \quad \forall \xi \in S$ ja $R^*f(x) := \int_S e^{2\pi ix\xi} f(\xi)\,d\mu(\xi) \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ sekä[1] $S \subset \mathbb{R}^n$. $\langle f, g\rangle_{L^2(X)} := \int_X f\bar{g}$ on $L^2(X)$-sisätulo.[2]

Vastaus: $\mathcal{F}f \in \mathcal{S} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, joten myös sen rajoittuma $Rf = (\mathcal{F}f)_{|S} \in \mathcal{C}_0^\infty(S)$. Selvästi myös $R^*Rf \in \mathcal{C}_b$ (enemmänkin), joten tehtävän integraalit suppenevat.

$$\langle R^*Rf, f\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x) R^*Rf(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x) \int_S e^{2\pi ix\xi} Rf(\xi)\,d\mu(\xi)\,dx$$

$$= \int_S \int_{\mathbb{R}^n} Rf(\xi) e^{2\pi ix\xi} \bar{f}(x)\,dx\,d\mu(\xi) = \int_S Rf(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \overline{e^{-2\pi ix\xi} \bar{f}(x)}\,dx\,d\mu(\xi)$$

$$= \int_S Rf(\xi)\overline{Rf(\xi)}\,d\mu(\xi) =: \langle Rf, Rf\rangle_{L^2(S,d\mu)}.$$

Ainahan $\int \bar{f} = \overline{\int f}$.
Integrointijärjestyksen vaihto: Fubinin lauseen [R2:8.8] mukaan integrandin pitää olla ($\geq$ 0 tai) absoluuttisesti suppeneva, ts. $\int_{\mathbb{R}^n}\int_S |Rf(\xi)e^{2\pi ix\xi}\bar{f}(x)|\,d\mu(\xi)\,dx < \infty$, mikä on totta, koska $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $Rf \in \mathcal{C}_b \subset L^1(\mu)$, (lisäksi integrandin pitää olla tulomitallinen $\mathbb{R}^n \times S$:ssä, mitä jatkuva funktio tietysti on (paloittainkin jatkuvat)).

[1] "$d\mu(\xi)$": Integrointimuuttujana ξ, mittana tavallisen Lebesguen mitan m sijasta mitta μ.

[2] Usein sisätuloa merkitään (f, g) ja $\langle f, g\rangle$:llä merkitään funktionaalin (duaalin alkion) $f \in B^*$ arvoa pisteessä $g \in B$ (kun B on Banach-avaruus tai muu TVS).
Jokainen $T \in (L^p)^*$ $(1 \leq p < \infty)$ on samaistettavissa johonkin $f \in L^q$ s.e. $\langle T, g\rangle = \langle f, g\rangle := \int fg \ \forall g \in L^p$ (kun $1 < p < \infty$ tai ($p = 1$ ja X on σ-äärellinen)) [R2:6.16], joten tämä "paritus duaalin kanssa-merkintä viittaisi määritelmään $\langle f, g\rangle := \int fg$. Stein siis kuitenkin tarkoittaa (f, g):llä sisätuloa $\int f\bar{g}$.

Tehtävä 10.2 ([s. 354] *keskitasoa, lyhyehkö*):
Yritä osoittaa, että jos $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ja

$$(Mf)(x) := \sup_{r>0} |B_r|^{-1} \int_{|y|<r} |f(x-y)|\,dy, \qquad (x \in \mathbb{R}^n),$$

missä $|B_r| := m(B_r) = v_n r^n$, $B_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$, ja $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on radiaalinen, ≥ 0 ja radiaalisesti vähenevä, niin $|(f * \Phi)(x)| \leq Mf(x)$. (Tulosta käytetään Hardyn–Littlewoodin–Sobolevin epäyhtälön todistuksessa.

Vastaus: Vihje: estimoi Φ:tä alta $\sum_{j=1}^k a_j \chi_{B_{r_j}}$-muotoisilla funktioilla.
1° Olkoon $\Phi = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{B_{r_j}}$, missä $a_j \geq 0 \ \forall j$.

$$(f * \chi_{B_r})(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\chi_{B_r}(y)\,dy = \int_{|y|<r} f(x-y) \leq m(B_r)Mf(x),$$

joten

$$(f * \sum_{j=1}^k a_j\chi_{B_{r_j}})(x) = \sum_{j=1}^k a_j(f * \chi_{B_{r_j}})(x)$$

$$= Mf(x)\sum_{j=1}^k a_j m(B_{r_j}) = Mf(x)\int \Phi = Mf(x).$$

2° Olkoon sitten Φ kuten tehtävässä. Olkoon $\phi(r) := \Phi((r, 0, 0, ..., 0))$ (jolloin $\Phi(x) = \phi(|x|) \ \forall x$, koska Φ on radiaalinen, ts. vain r:n funktio).

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\,dx = \int_0^\infty \phi(r)a_n r^{n-1}\,dr,$$

joten $\phi(r)a_n r^{n-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ eli $\phi \in L^1(\mathbb{R}_+, \mu)$, missä $d\mu = a_n r^{n-1}\,dr$. Valitaan kasvava jono $\{s_l\}$ yksinkertaisia funktioita s.e. $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \to \phi$ [R2:1.17]. Tällöin $s_n \underset{L^1}{\to} \phi$ [dom. konv.]. Niinpä

$$0 \leftarrow \|\phi(r) - s_l\|_{L^1(\mathbb{R}_+,\mu)} = \int_0^\infty [\phi(r) - s_l(r)]a_n r^{n-1}\,dr = \int_{\mathbb{R}^n} [\phi(x) - S_l(x)]\,dx,$$

missä $S_l(x) := s_l(|x|) = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{B_{r_j}}$. Jos $f \geq 0$, niin (koska $\int s_n \leq \int \Phi = 1$).

$$f * \Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\Phi(y)\,dy \overset{mon.\ konv.}{\longleftarrow} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)s_n(y)\,dy \overset{1^o}{\leq} Mf(x).$$

Muillakin f on $|f| \geq 0$, joten pätee $|f * \Phi(x)| \leq |f| * \Phi(x) \leq M|f|(x) = Mf(x)$, QED.

Tehtävä 10.3 ([s. 348] *keskitasoa, keskipitkä*):
Olkoon $\chi(x) = \chi_{|x|\leq 1}$, $(x \in \mathbb{R}^n)$. Osoita, että $|\hat{\chi}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-(n+1)/2}$.

Vastaus: Valitaan $\beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ s.e. $\chi_{[1/2,\infty[} \leq \beta \leq \chi_{]1/4,\infty[}$. Ketjusäännön perusteella $\beta(|x|) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, koska $|x| := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

$$\chi_1(x) := \beta(|x|)\chi(x), \quad \chi_0 := \chi - \chi_1,$$

jolloin $\chi_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$.
Tehtävä ratkaistaan pallokoordinaattien ja $\widehat{d\sigma}$:n suppenemisnopeuden avulla. Tätä ei voida soveltaa χ:hin, koska $|r\xi|$ ei ole suuri suurilla $|\xi|$, ellei r:llä ole alarajaa – χ_1:n tapauksessa $1/4$ on tälläinen alaraja [2^o] ja χ_0 hoituu helposti, koska sen kantaja on kompakti [1^o].

1$^{\mathbf{o}}$ $\hat{\chi}_0(\xi) = O(|\xi|^{-N})\ \forall N$:
Tod.: Lauseen [2.1.4, s. 341] perusteella $I(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\chi_0(x)\,dx = O(\lambda^{-N})\ \forall N$, jos $\chi_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ ja ϕ:llä ei ole kriittisiä pisteitä ($\nabla\phi = 0$) $\operatorname{supp}\chi_0$:ssa. Jos $\xi = (|\xi|, 0, 0, ..., 0)$, niin

$$\hat{\chi}_0(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i|\xi|x_1}\chi_0(x)\,dx,$$

joten voidaan merkitä $\phi(x) = 2\pi x_1$, $\lambda = |\xi|$, jolloin $\nabla\phi \equiv (2\pi, 0, 0, ..., 0)$, siis ϕ:llä ei ole kriittisiä pisteitä, mistä seuraa, että $\hat{\chi}_0(\xi) = O(|\xi|^{-N})\ \forall N$ (koska χ_0 on radiaalinen, ei tarvitse tutkia muunlaisia ξ). Siis enää χ_1 on ongelmana.

2$^{\mathbf{o}}$ $\hat{\chi}_1(\xi) = O(|\xi|^{-(n+1)/2})$:
Tod.: Sovelletaan jälleen "pallokoordinaatteja"[R2: teht. 8.8]:

$$\hat{\chi}_1(\xi) = \int_{1/4<|x|<1} \beta(|x|)e^{-ix\xi}\,dx = \int_{1/4}^1 \beta(r)r^{n-1}\left[\int_{S^{n-1}} e^{-iru\xi}\,d\sigma(u)\right] dr.$$

Tässähän $[...] = \widehat{d\sigma}(r\xi) \in O(|r\xi|^{-(n-1)/2})$ [s. 348]. Tarkemmin: kaavan (15) [s. 338] perusteella

$$\widehat{d\sigma}(r\xi) = e^{i|2\pi r\xi|}a_0|2\pi r\xi|^{-(n-1)/2} + e^{-i|2\pi r\xi|}b_0|2\pi r\xi|^{-(n-1)/2} + O(|2\pi r\xi|^{-(n+1)/2}),$$

ja viimeinen termi ei ulommasta integraalista kasva (siis se on yhä $O(|\xi|^{-(n+1)/2})$), joten tutkittavaksi jäävät a_0- ja b_0-termit.

$$\int_{1/4}^1 \beta(r)r^{n-1}e^{i2\pi r|\xi|}a_0' r^{-(n-1)/2}|\xi|^{-(n-1)/2}\,dr$$

$$= a_0'|\xi|^{-(n-1)/2}\int_{1/4}^1 \beta(r)r^{(n-1)/2}e^{i2\pi r|\xi|}\,dr.$$

$$\int_{1/4}^1 \beta(r)r^{(n-1)/2}e^{i2\pi r|\xi|}\,dr = \Big|_{1/4}^1 \beta(r)r^{(n-1)/2}\frac{e^{i2\pi r|\xi|}}{i2\pi|\xi|} - \int_{1/4}^1 \frac{e^{i2\pi r|\xi|}}{i2\pi|\xi|}[\beta(r)r^{(n-1)/2}]'\,dr$$

$= O(|\xi|^{-1})$, joten a_0-termi on $O(|\xi|^{-(n+1)/2})$. Sama pätee b_0-termille, joten todella $\hat{\chi}_1(\xi) = O(|\xi|^{-(n+1)/2})$, QED.

Tehtävä 10.4 ( ):
Olkoon $N(\lambda)$ hilapisteitten $j \in \mathbb{Z}^n$ lukumäärä $\mathbb{R}^n$:n λ-säteisessä origokeskisessä pallossa B_λ. Osoita, että millään $K \in \mathbb{R}_+$ *ei* päde

$$|N(\lambda) - m(B_\lambda)| \leq K\lambda^{n-2}, \quad \lambda \to \infty,$$

missä $m(B_\lambda) = v_n r^n$ on B_λ:n (Lebesguen) mitta (eli tilavuus) (vrt. Stein: s. 362).

Vastaus: $n = 1$: $m(B_\lambda) = 2\lambda$, $N(\lambda) = 2\lceil\lambda\rceil - 1$, joten $|m(B_\lambda) - N(\lambda)| = |2(\lceil\lambda\rceil - \lambda) - 1|$ on $1\ \forall\lambda \in \mathbb{N}$, joten se ei ole $\leq K\lambda^{-1}$.