Mat-1.159 Harmoninen analyysi ja ..., 1. harjoitus ma 29.1.1996 klo 12–14, U325 (4 sivua)

Laskuharjoitukset pidetään maanantaisin klo 12.15 salissa U325; pisteitä ei jaeta. Laskuharjoituksista yms. voi kysellä kurssinassistentilta: Kalle Mikkola, vo. ma klo 14 (U327) tai sähköpostitse Kalle.Mikkola@hut.fi. Laskuharjoitustehtäviä ja mallivastauksia voi hakea Optimin huoneen (U317) HarmA96-riippukansiosta.

Näissä laskuharjoituksissa tehtävät 1.3 ja 1.4 ovat tärkeitä! Käy ensin ne läpi ja muut vain jos ehdit.

Tiivistelmä teoriasta: nopeasti vaimenevien funktioiden avaruudessa

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d\}$$

määritellään metriikka ρ, mistä seuraa (yksityiskohdat eivät ole tärkeitä), että jono $\{f_n\} \subset \mathcal{S}$ suppenee funktioon $f \in \mathcal{S}$ joss $\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \to 0$ $(n \to \infty)$ $\forall \alpha, \beta$. Niinpä sinun ei tarvitse ymmärtää metriikkaa ρ, muista vain suppenemiskäsite. Näin määritelty metrinen avaruus on täydellinen [teht1.2].

Fourier-muunnos $(\mathcal{F}u)(\xi) := \gamma \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-ix\xi}\, dx$ $(\gamma := (2\pi)^{-d/2})$ määritellään $\forall u \in L^1$. Jos $u \in \mathcal{S}$, niin $\mathcal{R}\mathcal{F}\mathcal{F}u = u$ [Rauch:2.2.4], joten muuntamalla uudelleen ja peilaamalla saadaan $\mathcal{F}u$:sta u. $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ (se on siis jatkuva ja lineaarinen $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$) [Rauch:2.2.1].

$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^d)$, kun $1 \le p < \infty$. Toisaalta $\mathcal{C}_c^\infty \subset \mathcal{S}$, joten myös $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on tiheä. Jos $\mathcal{S}$:ää ajatellaan L^2:n aliavaruutena (siis käytetään $\|\cdot\|_2$-normia), $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to L^2$ on jatkuva ($\|\mathcal{F}\phi\|_2 = \|\phi\|_2$), joten se laajenee lineaarikuvaukseksi $L^2 \to L^2$, joka sattuu vielä säilyttämään normin [Rauch:2.3.4].

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) := (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))^* := \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \mathbb{C})$ on jatkuvien lineaarikuvausten $\mathcal{S} \to \mathbb{C}$ vektoriavaruus ($\mathcal{S}$:n duaali). Banach-avaruuksien duaalit varustetaan operaattorinormilla, mutta $\mathcal{S}$ ei ole Banach-avaruus, joten käytetään $\mathcal{S}'$:ssä "heikkoa*-topologiaa". Sen yksityiskohdat kerrotaan [R3:3.14]:ssä (Rudin: "Functional Analysis"), mutta sinun ei tarvitse tietää siitä mitään muuta kuin että $T_n \to T$ avaruudessa $\mathcal{S}'$ joss $T_n(\phi) \to T(\phi)$ $\forall \phi \in \mathcal{S}$ [Rauch:s.75].

Jos $T \in \mathcal{S}'$, niin $\mathcal{F}T$ määritellään $(\mathcal{F}T)(\phi) := T(\mathcal{F}\phi)$ $\forall \phi \in \mathcal{S}$, vastaavasti $(\partial^\alpha T)(\phi) := T((-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \phi)$ (esim. $T'(\phi) := T(-\phi') = -T(\phi')$, kun $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$) jne. [Rauch:2.4.4]. [Rauch]:ssa todistetaan, että näin määritelty $\mathcal{F}$ on lineaarinen ja jatkuva $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ (ts. $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}')$); samoin $\partial^\alpha, \tau_h, \sigma_k, M \in \mathcal{L}(\mathcal{S}')$ [Rauch:2.4.5][1]; sinun ei tarvitse ymmärtää todistuksia.

Kaikki L^p-funktiot (erityisesti $\mathcal{S}$), mitat yms. voidaan samaistaa $\mathcal{S}'$:n alkioiksi [Rauch:s.75]; muitakin on. Jos $f \in L^p$, voidaan kuvausta $\phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f\phi$ merkitä T_f:llä. Jos haluat ylimääräistä harjoitusta, voit todistaa, että tällöin $T_{\tau_h f} = \tau_h T_f \wedge T_{\sigma_k f} = \sigma_k T_f$. Jos $f \in L^1$, (tai L^2) niin vastaava pätee $\mathcal{F}$:lle jne., joten em. määritelmät ovat järkeviä ja luonnollisia.

Tehtävä 1.1 ([s. 62] *Mekaanista laskeskelua, ei tärkeä*):
Laskuharjoituksissa $D := \partial := \frac{d}{dx}$ toisin kuin monissa kirjoissa.

Huom.: yleensä et tarvitse metriikkaa ρ, sillä (kuten pienellä laskulla nähdään) $f_n \to f$ joss $\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \to 0$ $\forall \alpha, \beta$, mikä on yleensä paljon helpompi tarkistaa!

$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty x^k$ (kun $|x| < 1$), mistä saadaan induktiolla[2] $(1-x)^{-m} = \sum_{k=0}^\infty \binom{m+k-1}{k} x^k$.

Niinpä $\sum_{k=0}^\infty \binom{m+k-1}{k} 2^{-k} = (1-\frac{1}{2})^{-m} = 2^m$ $\quad (*)$.

Alla törmäämme kysymykseen: montako multinomia $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on tietyllä $|\alpha|$:n arvolla n?
Esim. $|\alpha| = 5$, $d = 3$: $(5,0,0)$, $(4,1,0)$, $(4,0,1)$, $(3,2,0)$ ..., 21 kpl.

---

[1] Oikeastaan niitä ei todisteta jatkuviksi vaan jonojatkuviksi, ts. $T_n \to T \implies \tau_h T_n \to \tau_h T$ jne. (metrisissä avaruuksissa jatkuvuus ja jonojatkuvuus (sekä tiheys ja jonotiheys sekä sulkeuma ja jonosulkeuma, vrt. tehtävän 1.5 lemma) ovat synonyymejä, mutta $\mathcal{S}'$ ei ole metrinen, joten todistus vaatisi heikko*-topologian tuntemista, onneksi jonojatkuvuus riittää tällä kurssilla.)

[2] Näissä alaviitteissä on lähinnä vain toisarvoisia asioita, voit sivuuttaa.
Potenssisarjaa voi derivoida termeittäin, joten $\frac{d}{dx}(1-x)^{-m} = -m(1-x)^{-m-1}(-1) = m(1-x)^{-m-1}$, joten $(1-x)^{-m-1} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^\infty \frac{d}{dx}\binom{m+k-1}{k} x^k = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^\infty \binom{m+k-1}{k} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{m}\frac{(m+k-1)\dots(m+1-1)}{k!} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^\infty \frac{(m+k-1)\dots(m+1+1-1)}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(m+1+n-1)\dots(m+1+1-1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^\infty \binom{(m+1)+n-1}{n} x^n$, QED.

Voimme tässä merkitä viisi pistettä jonoon ja laittaa yhteensä kaksi pilkkua samaan jonoon, jolloin pisteet jakautuvat kolmeen karsinaan. Tällaisia symbolijonoja on $\binom{7}{5} = 21$ kpl (koska seitsemän symbolin jonosta viiden pisteen paikat voi valita $\binom{7}{2}$ eri tavalla). Yleisesti[3]

$$|\{\alpha \in \mathbb{N}^d \mid |\alpha| = n\}| = \binom{n+(d-1)}{n}. \quad (**)$$

Sitten todistetaan suppeneminen:

$$\rho(g,f) := \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\alpha|-|\beta|}\frac{\|g-f\|_{\alpha,\beta}}{1+\|g-f\|_{\alpha,\beta}}.$$

Niinpä $\rho(g,f) < \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\alpha|-|\beta|} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}\sum_{\beta\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\alpha|-|\beta|}$
$= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\alpha|}\sum_{\beta\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\beta|} = (\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\alpha|})(\sum_{\beta\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\beta|}) = (\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\alpha|})^2$
$= (\sum_{n=0}^\infty \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d,\ |\alpha|=n} 2^{-|\alpha|})^2 = (\sum_{n=0}^\infty 2^{-n}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d,\ |\alpha|=n} 1)^2$
$\overset{**}{=} (\sum_{n=0}^\infty 2^{-n}\binom{n+(d-1)}{n})^2 \overset{*}{=} (2^d)^2 = 4^d.$

Siis ρ on $[0,4^d[$-arvoinen funktio, osoitetaan vielä, että se täyttää metriikan kolme aksioomaa ($\forall f,g\in\mathcal{S}$).

1^o $\rho(f,g)=0 \iff f=g$, koska Selvästi $\rho(f,f)=0$ ja toisaalta $\rho(f,g) = 0 \implies \frac{\|g-f\|_{\alpha,\beta}}{1+\|g-f\|_{\alpha,\beta}} = 0\ \forall\alpha,\beta \implies \|g-f\|_{\alpha,\beta} = 0\ \forall\alpha,\beta \implies 0 = \|g-f\|_{0,0} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|(g-f)(x)| \implies 0 = |(g-f)(x)| = |g(x)-f(x)|\ \forall x \implies g(x) = f(x)\ \forall x \implies g=f$.

2^o Selvästi $\rho(f,g) = \rho(g,f)$.

3^o $\frac{c}{1+c} \le \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$, kun[4] $c \le a+b$.

[3]Pilkkujahan tarvitaan $d-1$ kpl, joten symboleja on yhteensä $n+d-1$ kpl. Selvästihän jokainen $d-1$ pilkun ja n pisteen jono kuvaa jotakin (eri) multinomia ja jokainen multinomi on esitettävissä tällaisena jonona.

[4] $\iff c(1+a)(1+b) \le a(1+b)(1+c) + b(1+a)(1+c) \iff c \le a+b+ab+abc$.

Niinpä $\rho(f,h) \le \rho(f,g)+\rho(g,h)$, koska vasemman puolen termit ovat enintään oikean puolen termien suuruisia.[5]

Siis ρ on metriikka joukossa $\mathcal{S}$.

Tehtävä 1.2 (*vaikeahko, ei kovin tärkeä*):
Todistetaan samantien vähän enemmänkin, koska se ei vaikeuta tehtävää. Olkoon $\Omega \subset\!\!\!\circ\ \mathbb{R}^d$ (ts. olkoon Ω avoin $\mathbb{R}^d$:n osajoukko). Olkoon $\mathcal{C}_b(\Omega)$ rajoitettujen jatkuvien $f:\Omega\to\mathbb{C}$ joukko sup-normilla. $\mathcal{C}_b(\Omega)$ on Banach-avaruus [R1:7.15][6]

Lemma: Olkoon $\epsilon > 0$. Voidaan valita $N\in\mathbb{N}$ ja $\delta>0$ s.e. jos $f,g\in\mathcal{S}$ ja $\|f-g\|_{\alpha,\beta} < \delta$ niillä α,β joilla $|\alpha|\le N \wedge |\beta|\le N$, niin $\rho(f,g)<\epsilon$.

Todistus: Olkoon N s.e. $\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d,\ |\alpha|>N\vee|\beta|>N} 2^{-|\alpha|-|\beta|} < \epsilon/2$ (tällainen on olemassa, koska sarja suppenee). Olkoon $\delta := (\epsilon/2)/4^d$. Jos f,g ovat kuten lemmassa, $\rho(f,g) \le \sum_{|\alpha|,|\beta|\le N} + \sum_{|\alpha|>N\vee|\beta|>N} < 4^d(\epsilon/2)/4^d + \epsilon/2 = \epsilon$, QED

Erityisesti $f_n\to f$ joss $\|f_n-f\|_{\alpha,\beta}\to 0\ \forall\alpha,\beta$ ja $\{f_n\}$ on Cauchy-jono joss $\forall\delta>0\ \forall\alpha,\beta\ \exists M$ s.e. $n,m\ge M \implies \|f_n-f_m\|_{\alpha,\beta}<\delta$ (ts. joss $\|f_n-f_m\|_{\alpha,\beta}\to 0$, kun "$m,n\to\infty$"). Siis emme yleensä tarvitse em. hankalaa metriikkaa, vaan voimme tutkia kutakin seminormia erikseen.[7]

Todistetaan, että $\mathcal{S}$ on täydellinen, ts. jokainen sen Cauchy-jono suppenee: Olkoon $\{f_n\}\subset\mathcal{S}$ Cauchy-jono. Tällöin se on Cauchy-jono myös $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$:ssä (koska $\|f_n-f_m\|_{\mathcal{C}_b} := \sup_x|f_n(x)-f_m(x)| = \|f_n-f_m\|_{0,0}\to 0$, kun $m,n\to\infty$), joten $f_n\to f$ jollain $f\in\mathcal{C}_b$ (koska $\mathcal{C}_b$ on täydellinen [R1:7.15]).

[5]koska $\|f-h\|_{\alpha,\beta} := \sup_x|x^\alpha D^\beta(f-h)(x)| = \sup_x|(x^\alpha D^\beta f - x^\alpha D^\beta h)(x)| = \sup_x|x^\alpha D^\beta f(x) - x^\alpha D^\beta h(x)| \le \sup_x[|x^\alpha D^\beta f(x) - x^\alpha D^\beta g(x)||x^\alpha D^\beta g(x) - x^\alpha D^\beta h(x)|] \le \sup_x|x^\alpha D^\beta f(x) - x^\alpha D^\beta g(x)| + \sup_x|x^\alpha D^\beta g(x) - x^\alpha D^\beta h(x)| =: \|f-g\|_{\alpha,\beta} + \|g-h\|_{\alpha,\beta}$; tämän tosin saisi siitä, että kyseessä on seminormi, joten $\|(f-g)+(g-h)\|_{\alpha,\beta} \le \|f-g\|_{\alpha,\beta}+\|g-h\|_{\alpha,\beta}$.

[6][R1] eli "Rudin 1"tarkoittaa Modernin analyysin perusteiden oppikirjaa Walter Rudin: "Principles of Modern Analysis"(ja 7.15 sen kohtaa 7.15).

[7]Sama pätee muissakin FrĆchet-avaruuksissa, esim. äärettömän monta kertaa derivoituvien funktioiden avaruudessa $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, missä $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ on avoin (siellä käytetään $\|f\|_{0,\beta}$-seminormeja).

Samoin $\|x^\alpha D^\beta f_n - x^\alpha D^\beta f_m\|_{\mathcal{C}_b} = \|f_n - f_m\|_{\alpha,\beta} \to 0$, joten on olemassa $f_{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}_b$ s.e. $x^\alpha D^\beta f_n \to f_{\alpha,\beta}$. (+)

(Olkoon $\beta = (1,0,0,...,0)$.) Siis $f_n \to f$ ja $\frac{d}{dx_1} f_n = D^\beta f_n \to D^\beta f = f_{0,\beta}$ tasaisesti (erotuksen sup menee nollaan), joten lauseen [R1:7.17] perusteella $\exists \frac{d}{dx_1} f = f_{0,\beta}$. Induktiolla nähdään, että f:llä on kaikki derivaatat (ts. $f \in \mathcal{C}^\infty$) ja $D^\beta f = f_{0,\beta}\ \forall \beta \in \mathbb{N}^d$.

$f_{\alpha,\beta} := \lim_n x^\alpha D^\beta f_n = x^\alpha \lim_n D^\beta f_n = x^\alpha f_{0,\beta} = x^\alpha D^\beta f\ \forall \alpha,\beta$, joten $x^\alpha D^\beta f$ on rajoitettu jatkuva funktio $\forall \alpha,\beta$ (koska $f_{\alpha,\beta}$ on), siis $f \in \mathcal{S}$. Lisäksi $\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} = \|x^\alpha D^\beta f_n - x^\alpha D^\beta f\|_{0,0} = \|x^\alpha D^\beta f_n - f_{\alpha,\beta}\|_{0,0} \to 0\ \forall \alpha,\beta$ [(+)], joten [Lemma] $f_n \to f$ avaruudessa $\mathcal{S}$ (ts. $\rho(f_n, f) \to 0$).

Siis mielivaltainen Cauchy-jono $\{f_n\} \subset \mathcal{S}$ suppenee johonkin $f \in \mathcal{S}$, joten $\mathcal{S}$ on täydellinen metrinen avaruus, QED. [8]

Tehtävä 1.3 (*helppo, nopeahko, tärkeä*):
Merkitään koko kurssin ajaksi $\hat{u} := \mathcal{F}u$, $\gamma := (2\pi)^{-d/2}$ ja $x\xi := \sum_{k=1}^d x_k \xi_k$ ($x, \xi \in \mathbb{R}^d$), niin säästetään kirjoitusvaivaa. Siis **(a)**

$$\hat{u}(\xi) := \gamma \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix\xi}\, dx$$

(ja koska tässä tehtävässä $d = 1$) $= \gamma \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-ix\xi}\, dx = \gamma \int_0^\infty e^{-x} e^{-ix\xi}\, dx = \gamma \int_0^\infty e^{-x(1+i\xi)}\, dx = \gamma \Big|_0^\infty \frac{e^{-x(1+i\xi)}}{-(1+i\xi)} = \gamma [0 - \frac{e^{-0(1+i\xi)}}{-(1+i\xi)}] = \gamma \frac{1}{1+i\xi}$. Siis $\hat{u}(\xi) = \gamma \frac{1}{1+i\xi}$.

[8]Samaan tapaan nähtäisiin, että $\mathcal{C}_b^\infty(\Omega)$ ja $\mathcal{C}_b^n(\Omega)$ ovat täydellisiä (jälkimmäiset peräti Banach-avaruuksia, kunkin normi saadaan esim. summaamalla kaikki seminormit (niitähän on vain äärellinen määrä)); tässä $\mathcal{C}_b^n(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}_b(\Omega) \,|\, D^\alpha f \in \mathcal{C}_b(\Omega) \in \mathcal{C}_b(\Omega)\ \forall |\alpha| \le n\}$ on n kertaa jatkuvasti ja rajoitetusti derivoituvien funktioiden avaruus. Vastaavasti myös $\mathcal{C}^n(\Omega)$ ja $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ovat täydellisiä metrisiä avaruuksia (nekin ovat FrĆchet-avaruuksia), seminormeilla $\|f\|_{K_n,\beta} := \sup_{x \in K_n} |D^\beta f(x)|$, missä voidaan valita $K_n := \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, |x| \le n\}$, kun $\Omega = \mathbb{R}^d$ (onhan jatkuva funktio aina rajoitettu kompaktissa K_n); muilla Ω joudutaan valitsemaan hankalampia K_n, esim. $K_n := \{x \in \Omega \,|\, |x| \le n \wedge d(x, \Omega^c) \ge 1/n\}$.
Huom.: Avaruuksien L^p_{loc} topologiat muodostetaan suunnilleen samaan tapaan.
Älä mieti näitä nyt pidempään, et tarvinne niitä tässä kurssissa!

Tämä integraalin avulla muuntaminen on siis määritelty kaikille L^1-funktioille [Rauch: 2.3.3], ja tämän tehtävän funktiot ovat L^1-funktioita ($\|u\|_1 < \infty$ jne.):
$\|u\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |u| = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$. Vastaavasti (sij. $t := x - h$) $\|\tau_h u\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |\tau_h u(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |u(x-h)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |u(y)|\, dy = \|u\|_1 = 1$, $\|e^{ixh} u\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |e^{ixh} u(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |e^{ixh}||u(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot |u(x)|\, dx = 1$ ja $\|(\sin x) u\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |\sin x\, u(x)|\, dx \le \int_{\mathbb{R}} |u(x)|\, dx = 1$ (lisäksi tehtävän funktiot ovat selvästi mitallisia, kuten kaikki muutkin paloittain jatkuvat funktiot).[9]

(b) $\mathcal{F}(\tau_h u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} (\tau_h u)(x) e^{-ix\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(x-h) e^{-ix\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-i(t+h)\xi}\, dt = \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-ih\xi} e^{-it\xi}\, dt = e^{-ih\xi} \hat{u}(t)$ (kuten [Rauch: 2.2.2]:ssa).

(c) $\mathcal{F}(e^{ixh} u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{ixh}(x) e^{-ix\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ix(\xi-h)}\, dx = \hat{u}(\xi - h) = \tau_h \hat{u}(\xi)$.

(d) Tapa 1: $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, joten $\mathcal{F}(u \sin x)(\xi) := \frac{\gamma}{2i} \int_0^\infty e^{-x}(e^{ix} - e^{-ix}) e^{-ix\xi}\, dx = \frac{\gamma}{2i} \int_0^\infty [e^{x(i-i\xi-1)} - e^{x(-i-i\xi-1)}]\, dx = \frac{\gamma}{2i} \Big|_0^\infty [\frac{e^{x(i-i\xi-1)}}{i-i\xi-1} - \frac{e^{x(-i-i\xi-1)}}{-i-i\xi-1}] = \frac{\gamma}{2i} [\frac{1}{-i-i\xi-1} - \frac{1}{i-i\xi-1}] = \frac{\gamma}{2i} \frac{2i}{(-i-i\xi-1)(i-i\xi-1)} = \frac{\gamma}{2-2\xi+4\xi i}$.

Tapa 2: Kaavan [Rauch: 2.5(6)] ja tiedon $\mathcal{F}^* = \mathcal{R}\mathcal{F}$ perusteella (ja vähän jatkuvuuksien ja $\mathcal{C}_c^\infty$:n tiheyden perustella yleistämällä (yksityiskohdat sivuutetaan)) $\mathcal{F}(fu) = \gamma \mathcal{R}[\hat{f} * \hat{u}]$, mistä voisi laskea saman.

Tehtävä 1.4 ([s. 78] *helppo, nopea, erittäin tärkeä*):
$\delta_a(\phi) := \phi(a)$ normaaliin tapaan[10]. Käytetään Rauchin merkintää $\langle T, \phi \rangle := T(\phi)$, kun $T \in \mathcal{S}' \wedge \phi \in \mathcal{S}$. Distribuutiolle T määritellään $\langle T', \phi \rangle := -\langle T, \phi' \rangle$ (siis yleisesti $\langle D^\alpha T, \phi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle$) [Rauch: 2.4.5].

[9]Muut L^p-funktiot kuin L^1-funktiot ja ylipäänsä muut $\mathcal{S}'$:n alkiot on muunnettava [Rauch: 2.4.4]:n avulla, ts. $\hat{T}(\phi) := T(\hat{\phi})$.
Jos $T = T_f$ jollain funktiolla f (ts. $T(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} f\phi\ \forall \phi \in \mathcal{S}$; tällöin on tapana samaistaa T ja f), niin $\hat{T} = T_{\hat{f}}$, ts. $\mathcal{S}'$-Fourier-muunnos yhtyy tavalliseen Fourier-muunnokseen (todistus sivuutetaan).
[10]Huom.: väittämän [Rauch: 2.4.1] toisen kohdan mukaisesti δ_a voidaan samaistaa mittaan μ_a, jolla $\mu_a(E) = 1$, kun $a \in E$ ja $\mu_a(E) = 0$ muilla E.

Niinpä $\langle \delta'_a, \phi \rangle := -\langle \delta_a, \phi' \rangle = -\phi'(a)$ ja $\langle \delta''_a, \phi \rangle := -\langle \delta'_a, \phi' \rangle = \phi''(a)$, ts. $\delta''_a(\phi) = \phi''(a)$.

Tehtävä 1.5 ([s. 71] *vaikeahko, pitkähkö*):

Merkitään $\mathcal{C}_v := \dot{\mathcal{C}} := \{u \in \mathcal{C} \mid \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0\}$. (Yleensä tästä käytetään merkintää $\mathcal{C}_0$, mutta Rauch varaa sen kompaktikantajaisten jatkuvien funktioiden joukolle $\mathcal{C}_c$.)

Lemma: Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin $\bar{A} = \{x \in X \mid \exists \{x_n\} \subset A\text{" s.e. "}x_n \to x\}$.

Todistus: Selvästi tuollainen x on joko A:n piste tai A:n kasautumispiste. Toisaalta $x \in \bar{A} \implies \forall n\ \exists x_n \in N_{1/n}(x) \cap A$ (vrt. [R1:2.18]), QED.

1^o $\mathcal{C}_v$ on suljettu:
Olkoon $\{f_n\} \subset \mathcal{C}_v$ ja $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ (avaruudessa L^∞ eli ess sup-normin suhteen). On siis osoitettava, että $f \in \mathcal{C}_v$.

Koska $\{f_n\}$ suppenee, se on Cauchy-jono ($\|f_n - f_m\|_\infty \to 0$, kun $m, n \to \infty$)[11] Jatkuvalla funktiolla $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)|$, joten $\{f_n\}$ on Cauchy-jono myös $\mathcal{C}_b$:ssä, siis $f_n \to g \in \mathcal{C}_b$ (koska $\mathcal{C}_b$ on täydellinen [R1:7.15]). Niinpä $f = g$ (m.k., siis voidaan samaistaa nämä).[12]

Enää on osoitettava, että $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ eli $\forall \epsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R}_+$ s.e. $|x| > M \implies |f(x)| < \epsilon$.
Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Valitaan n s.e. $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon/2$. Valitaan $M := M_{f_n,\epsilon/2} \in \mathbb{R}_+$ s.e. $|x| > M \implies |f_n(x)| < \epsilon/2$. Tästähän seuraa, että $|x| > M \implies |f(x)| = |f_n(x) + f(x) - f_n(x)| \le |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \epsilon/2 + \|f - f_n\|_\infty < \epsilon$, ts. näin valittu M kelpaa funktiolle f arvolla ϵ, QED.

[11] Tässä $\|g\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)|$ on L^∞-normi [R2:Ch3 tai R3:Ch1].

[12] Selvästi $\mathcal{C}_v \subset \mathcal{C}_b$ (jos $f \in \mathcal{C}_v$, niin jonkin M-säteisen pallon $\bar{B}_M$ ulkopuolella $|f| < \epsilon := 1$; kompaktissa $\bar{B}_M$ f on rajoitettu ($M' := \sup_{\bar{B}_M} |f| < \infty$), siis $\sup |f| \le \min(1, M')$.

Tehtävässä on tähän mennessä osoitettu, että $\mathcal{C}_b$ on L^∞:n suljettu aliavaruus. Seuraavassa kappaleessa saadaan valmiiksi todistus siitä, että $\mathcal{C}_v$ on $\mathcal{C}_b$:n (siis myös L^∞:n) suljettu aliavaruus, siis ne molemmat ovat Banach-avaruuksia kuten L^∞:kin (oikeastaan pitäisi vielä osoittaa $f, g \in \mathcal{C}_b \implies \alpha f, f + g \in \mathcal{C}_b$ ja vastaava $\mathcal{C}_v$:lle; sivuutetaan nämä helpot laskut).

2^o Koska $\mathcal{C}_v$ on suljettu ja $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_v$, välttämättä $\bar{\mathcal{S}} \subset \mathcal{C}_v$. Nyt on vielä osoitettava, että $\mathcal{C}_v \subset \bar{\mathcal{S}}$, ts. että $\mathcal{S}$ on tiheässä $\mathcal{C}_v$:ssä. Tämän teemme toteamalla ensin jokaisen $f \ge 0$ $\mathcal{S}$:n kasautumispisteeksi ja todistamalla tämän avulla saman muillekin f (kun $f \in \mathcal{C}_v$) En suosittele yksityiskohtiin perehtymistä, ellei asia tunnu helpolta.

Jos $f \in \mathcal{C}_v$, niin:
TAPA 1: $J_n * f \to f$ $(n \to \infty)$ ja $J_n * f \in \mathcal{C}_v$ [Adams: "Sobolev Spaces", 2.18e], kun J_n on tietty $\mathcal{C}_c^\infty$-funktio.
TAPA 2: Oletetaan ensin, että $f \ge 0$ (ts. $f(x) \ge 0\ \forall x$).
Olkoon $\epsilon > 0$, valitaan R s.e. $|x| \ge R \implies |f(x)| < \epsilon/2$.
Valitaan $N \in \mathbb{N}$ s.e. $N > \sup |f|$. Valitaan $n > 1/\epsilon$.
$V_k := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < R + 1 \wedge k/n < f(x)\}$ (avoin, koska kahden avoimen leikkus),
$K_k := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \le R \wedge (k+1)/n \le f(x)\}$ (kompakti)
$(k = 0, 1, ..., nN =: m)$.
Valitaan kullakin $k \le m$ funktio $\phi_k \in \mathcal{C}_c^\infty$ s.e. $\phi_k|_{K_k} = 1 \wedge \phi_k|_{V_k^c} = 0 \wedge 0 \le \phi_k \le 1$ (vrt. [Rauch:Prop2.3.2] tai [R2:Th2.20]). $g(x) := \sum_{j=1}^m \frac{1}{n}\phi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Jos $|x| \le R \wedge k/n \le f(x) < (k+1)/n$, niin $x \in K_j\ \forall j \le k-1$,
joten $g(x) \ge \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n} 1 = k/n$ ja $x \notin V_j\ \forall j > k$,
joten $g(x) \le \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{n} = (k+1)/n$.
Siis $k/n \le g(x) < (k+1)/n$, joten $|f(x) - g(x)| < 1/n < \epsilon$, kuten haluttiin (jos taas $|x| > R$, vastaavaan tapaan nähdään, että $|f(x) - g(x)| < 1/n < \epsilon$).

Olkoon sitten $f \in \mathcal{C}_v(\mathbb{R}^d)$ mielivaltainen. Tällöin $f = \operatorname{Re} f + \operatorname{Im} f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$, missä $f_j \in \mathcal{C}_v(\mathbb{R}^d) \wedge f_j \ge 0$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ [R2:1.14]. Valitaan funktiot $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathcal{C}_c^\infty$ kuten yllä. Jos $\|f_j - g_j\|_\infty < \epsilon/4\ \forall j$ ja $g := g_1 - g_2 + ig_3 - ig_4$, niin $|f(x) - g(x)| = |[f_1(x) - f_2(x) + if_3(x) - if_4(x)] - [g_1(x) - g_2(x) + ig_3(x) - ig_4(x)]| \le |f_1(x) - g_1(x)| + |f_2(x) - g_2(x)| + |f_3(x) - g_3(x)| + |f_4(x) - g_4(x)| < \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon$.

Siis peräti $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ on tiheässä $\mathcal{C}_v(\mathbb{R}^d)$:ssä, erityisesti sen ylijoukko $\mathcal{S}$ on tiheässä (siis jokainen $f \in \mathcal{C}_v(\mathbb{R}^d)$ on kummankin kasautumispiste), QED.