
Hovanovin homologia

Hermann Huhtamäki

Perustieteiden korkeakoulu

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi diplomi-insinöörin tutkintoa varten Espoossa 31.7.2026.

Työn valvoja ja ohjaaja

Apul.prof. Oscar Kivinen



**Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu**

Copyright © 2026 Hermann Huhtamäki

Teos voidaan julkaista Aalto-yliopiston julkaisuarkistossa.

Teos on lisensoitu Creative Commons ”Nimeä 4.0 Kansainvälinen” (BY 4.0) -käyttöluvalla.





Tekijä Hermann Huhtamäki

Työn nimi Hovanovin homologia

Koulutusohjelma Matematiikan ja operaatiotutkimuksen maisteriohjelma

Pääaine Matematiikka

Pääaineen koodi SCI3054

Työn valvoja Apul.prof. Oscar Kivinen

Työn ohjaaja Apul.prof. Oscar Kivinen

Päivämäärä 31.7.2026

Sivumäärä 101+13

Kieli Suomi

Tiivistelmä

Työ on kirjallisuuskatsaus solmutunnuksista, jotka auttavat vastaamaan avoimeen kysymykseen siitä, mitkä solmut ovat keskenään samanlaisia ja milloin kyseessä ovat eri solmut. Työn päätavoitteena on Hovanovin homologian määrittely, joka on yksi vahvimista tunnetuista solmutunnuksista. Lisäksi käsitellään Alexanderin ja Jonesin polynomeja.

Ensimmäisessä pääluvussa käsitellään homologia algebraa. Modulien osalta tutustutaan muun muassa modulien esitysmatriiseihin ja äärellisviritteisten modulien rakennelauseeseen. Kategoriateorian peruskäsitteiden kuten ylinuolen, luonnollisen muunnoksen ja tekijäkategorian lisäksi määritellään monoidinen kategoria sekä sen tarkka ja symmetrinen muoto. Luvun loppuosassa käsitellään ketjukompleksien perusominaisuuksia ja homologian eri muotoja. Tarkastelussa ovat erityisesti kolmiohomologian kolme tyyppiä eli soluhomologia sekä yleinen ja yksinkertainen kolmiohomologia.

Toinen luku keskittyy solmuteorian perusteisiin ja sen päätuloksena on Alexanderin polynomi. Luvussa käsitellään lyhyesti monistojen perusteita kuten sileitä monistoja ja niiden välisiä diffeomorfismeja. Peiteavaruuksien osalta huomio kiinnittyy erityisesti säännöllisten peiteavaruuksien ja peitemuunnoksista muodostettavien peiteryhmien väliin yhteyksiin, joita tutkitaan perusryhmiä hyödyntäen. Solmujen, solmukaavioiden ja solmutunnuksien määritelmien esittämisen lisäksi Seifertin pinnan avulla muodostetaan solmun komplementin ääretön syklinen peite, jonka ensimmäisen kolmiohomologiaryhmän moduliirakenteesta voidaan selvittää Alexanderin polynomi.

Viimeisessä luvussa muodostetaan Hovanovin homologia. Aluksi määritellään Jonesin polynomi Kauffmanin sulkeiden avulla, ja se esitetään jatkon kannalta hedelmällisessä oioskuutiomuodossa. Kun Jonesin polynomi vakioidaan uudelleen, niin sitä vastaava oioskuutio voidaan esittää 1-monistojen ja niiden välisien pienojen avulla. Se voidaan edelleen kuvata tietyllä $(1 + 1)$ -ulotteisella topologisella kvanttikenttäteorialla porrastetuiksi vektoriavaruuksiksi sekä niiden välisiksi kuvauksiksi, jotka toteuttavat Frobeniuksen algebran. Lopulta saadaan muodostettua Hovanovin sulkeet ja niistä edelleen Hovanovin homologia, joka on Jonesin polynomia aidosti vahvempi solmutunnus.

Avainsanat Algebrallinen topologia, kategoriateoria, homologia, Hovanovin homologia, Alexanderin polynomi, Jonesin polynomi



Author	Hermann Huhtamäki
Title	Khovanov homology
Degree programme	Master's Programme in Mathematics and Operations Research
Major	Mathematics
Code of major	SCI3054
Supervisor	Asst. Prof. Oscar Kivinen
Advisor	Asst. Prof. Oscar Kivinen
Date	31.7.2026
Number of pages	101+13
Language	Finnish

Abstract

This thesis is a literature review of various knot invariants, which help address the open problem of determining when two knots are equivalent and when they are not. The main objective is to define the Khovanov homology, which is one of the strongest known knot invariants. Additionally, the Alexander polynomial and the Jones polynomial are discussed.

The theme of the first main chapter is homological algebra. The main result concerning modules is the structure theorem for finitely generated modules over a principal ideal domain; presentation matrices, for example, are also introduced. In category theory, the essential definitions such as functors, natural transformations and quotient categories are introduced. Furthermore, monoidal categories including strict and symmetric variants are presented. The remainder of the chapter concerns chain complexes and different forms of homology. For example, singular and simplicial homologies are studied along with cellular homology.

The second chapter introduces the basics of knot theory. The chapter culminates in the construction of the Alexander polynomial. Initially, manifolds are studied briefly with particular attention to smooth manifolds and the diffeomorphisms between them. The section on covering spaces is especially focused on the relations between regular covering spaces and the groups of deck transformations, which are studied using fundamental groups. The basic definitions of knots, knot diagrams and knot invariants are followed by the construction of Seifert surfaces, which are used to construct the infinite cyclic cover for the knot complement. Its first singular homology group has a certain module structure, which is used to calculate the Alexander polynomial.

The main intention of the final chapter is to define the Khovanov homology. Initially, the Jones polynomial is defined using the Kauffman brackets. It is modified to a form more suitable for the Khovanov homology, particularly in terms of the cube of resolutions. After the Jones polynomial has been renormalized, the corresponding cube of resolutions can be presented with 1-manifolds and the cobordisms between those. That could be consequently mapped to graded vector spaces and linear maps between them that are compatible with a certain Frobenius algebra structure. Finally, the Khovanov brackets are formulated which lead to the definition of Khovanov homology. It is a knot invariant that is strictly stronger than the Jones polynomial.

Keywords Algebraic topology, category theory, homology, Khovanov homology, Alexander polynomial, Jones polynomial



Författare Hermann Huhtamäki

Titel Chovanovhomologi

Utbildningsprogram Magisterprogrammet i matematik och operationsanalys

Huvudämne Matematik

Huvudämnets kod SCI3054

Övervakare Bitr. prof. Oscar Kivinen

Handledare Bitr. prof. Oscar Kivinen

Datum 31.7.2026

Sidantal 101+13

Språk Finska

Sammandrag

Det här diplomarbetet är en litteraturoversikt över olika knutinvarianter, som hjälper till att besvara den öppna frågan om när två knutar är desamma och när de är olika. Det huvudsakliga syftet är att definiera Chovanovhomologin som är en av de starkaste kända knutinvarianterna i dag. Dessutom behandlas Alexander- och Jonespolynomen.

Temat för det första huvudkapitlet är homologisk algebra. Huvudresultatet för moduler är struktursatsen för ändligt genererade moduler över ett huvudidealsområde. Till exempel definieras också presentationsmatriserna. Inom kategoriteorin definieras de grundläggande begreppen liksom funktor, naturlig transformation och kvotkategori. Dessutom studeras monoidiska kategorier med strikta och symmetriska varianter. Den sista delen av kapitlet handlar om kedjekomplex och olika typer av homologi. Exempelvis studeras singular och simpliciell homologi tillsammans med cellhomologi.

Det andra kapitlet introducerar grunderna i knutteori. Kapitlet kulminerar i konstruktionen av Alexanderpolynomet. Först studeras mångfalder med särskild uppmärksamhet på släta mångfalder och diffeomorfismer mellan dem. Avsnittet om övertäckningsrum fokuserar på relationer mellan regulära övertäckningsrum och grupperna av övertäckningstransformationer, ett samband som studeras med hjälp av fundamentalgrupper. De grundläggande definitionerna av knutar, knutdiagram och knutinvarianter följs av konstruktionen av Seifertytor som används för att definiera den oändliga cykliska övertäckningen av knutkomplementet. Dess första singulara homologigrupp har en viss modulstruktur som kommer att användas för att beräkna Alexanderpolynomet.

Huvudsyftet för sista kapitlet är att definiera Chovanovhomologi. I början ska Jonespolynomet definieras med Kauffmanparenteser. Det skrivs om till en form som är bättre lämpad för Khovanovhomologin, särskilt i termer av upplösningsskuben. Efter att Jonespolynomet har renormaliserats kan motsvarande upplösningsskuben presenteras med 1-mångfalder och kobordismer mellan dem. Det kan följaktligen avbildas på graderade vektorrum och linjära avbildningar mellan dem som är kompatibla med en viss Frobeniusalgebrastruktur. Slutligen formuleras Chovanovparenteser, vilket leder till att Chovanovhomologi definieras. Det är en knutinvariant som är starkare än Jonespolynomet.

Nyckelord Algebraisk topologi, kategoriteori, homologi, Chovanovhomologi, Alexanderpolynom, Jonespolynom

Sisällys

Tiivistelmä	iii
Tiivistelmä (englanniksi)	iv
Tiivistelmä (ruotsiksi)	v
Sisällys	vi
Merkinnät ja kirjoitusperiaatteet	viii
Matemaattiset merkinnät	viii
Lyhenteet	xii
Siirtokirjoitus ja vierasperäiset nimet	xiii
1 Johdanto	1
2 Homologisen algebran perusteet	3
2.1 Moduli	3
2.1.1 Jaollisuus renkaissa	3
2.1.2 Modulin esitys	5
2.1.3 Äärellisviritteisien modulien rakennelause	6
2.2 Kategoria	8
2.2.1 Luonnollinen muunnos	8
2.2.2 Monoidinen kategoria	12
2.3 Ketjukompleksi	16
2.3.1 Ketjukompleksien kategoria	17
2.3.2 Ketjukompleksien ominaisuuksia	18
2.4 Homologia	20
2.4.1 Yleinen homologia	20
2.4.2 Yleinen kolmiohomologia	22
2.4.3 Yksinkertainen kolmiohomologia	31
2.4.4 Soluhomologia	37
3 Solmuteorian perusteet	39
3.1 Monisto	39
3.1.1 Topologinen monisto	39
3.1.2 Sileä monisto	40
3.2 Peiteavaruus	42
3.2.1 Yleispeite	43
3.2.2 Peitemuunnos	45
3.3 Solmu	49
3.3.1 Solmun määritelmä	49
3.3.2 Solmutunnus	50
3.4 Alexanderin polynomi	52
3.4.1 Alexanderin polynomin lähtökohta	53

3.4.2	Seifertin pinta	55
3.4.3	Alexanderin polynomin määritelmä	56
4	Hovanovin homologia	61
4.1	Jonesin polynomi	61
4.1.1	Kauffmanin sulkeet	61
4.1.2	Jonesin polynomin määritelmä	64
4.1.3	Oioskuutio	67
4.2	Jonesin polynomin kategoriointi	68
4.2.1	Uudelleen vakioitu Jonesin polynomi	69
4.2.2	Porrastettu moduli	72
4.2.3	Piena	76
4.2.4	Frobeniuksen algebra	80
4.2.5	Hovanovin homologian määritelmä	83
4.3	Topologinen kvanttikenttäteoria	91
	Kuvat ja taulukot	93
	Lähdeluettelo	95
	Hakemisto	98

Merkinnät ja kirjoitusperiaatteet

Matemaattiset merkinnät

Kirjasinlajit

Työssä käytetään laajasti kolmea eri kirjasinlajia. Tavallisen kirjasinlajin latinalaiset pienaakkoset ja suuraakkoset ovat $a, b, c, \dots$ ja $A, B, C, \dots$ vastaavasti. Kreikkalaiset pienaakkoset ja latinalaisista poikkeavat suuraakkoset ovat $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ja $\Gamma, \Delta, \Theta, \dots$ vastaavasti. Tavallisella kirjasinlajilla ilmaistaan pisteitä ja joukkoja.

Kaunokirjallista kirjasinlajia $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$ käytetään kuvaamaan joukkojen kokoelmia, kuten topologisia avaruuksia.

Kolmantena kirjasinlajina ovat koristeelliset kirjaimet $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$, joilla kuvataan luokkia, joita ei välttämättä voida ilmaista joukkoina eli esimerkiksi kategorioita.

Vakiintuneen käytännön mukaan käytössä ovat myös muutamat erityiskirjasinlajit. Kuntia ilmaistaan taulukkirjaimilla $\mathbb{K}, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \dots$ ja joitakin nimettyjä kategorioita merkitään lihavoiduin kirjaimin, esimerkiksi **Top**.

Yleiset merkinnät

Taulukkoon 1 on koottu sellaiset yleiset merkinnät, joiden merkitys vaihtelee eri lähteissä. Erityisesti huomioitavaa on, että käytössä on kateogorateoreettinen merkintätapa kuvausten yhdisteelle eli kuvaukset on kirjoitettu samassa järjestyksessä kuin niitä vastaavat nuolet $f * g$ eikä joukko-opillisessa järjestyksessä, joka olisi $g \circ f$.

Taulukko 1: Yleiset merkinnät

Merkintä	Selitys
$\mathbb{N}$	Luonnolliset luvut $\{0, 1, \dots\}$
$\mathbb{K}$	Kerroinkunta
$f * g$	Kuvauksien yhdiste $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$
$A \subset B$	Osajoukko, ei välttämättä aito
$A \sqcup B$	Erillinen yhdiste
$f^{\leftarrow}$	Alkukuva

Kategoriat

Taulukossa 2 on luetteloitu tarvittavat nimetyt kategoriat ja taulukossa 3 on muita kategorioihin liittyviä merkintöjä. Erityisesti kategorian pisteiden ja nuolien luokista $\mathcal{A}$ ja $\vec{\mathcal{A}}$ sekä luonnollisista samaistuksista $\alpha: F \Leftrightarrow G$ käytettävät merkinnät voivat vaihdella eri lähteissä.

Taulukko 2: Kategorioiden nimet

Merkintä	Selitys	Määritelmä
1	Yhden pisteen kategoria	
Ab	Vaihdannaisien ryhmien kategoria	
Joukko	Joukkojen kategoria	
Ketju	Ketjukompleksien kategoria	Määritelmä 2.66
R-Mod	Modulien kategoria	
Pien$_{n+1}$	Pienojen kategoria	Määritelmä 4.43
Raami	Raamien kategoria	Määritelmä 2.107
Ryhmä	Ryhmien kategoria	
Top	Topologisien avaruuksien kategoria	
Top²	Topologisien avaruusparien kategoria	Nimitys 2.38
Top_*	Kantapisteavaruuksien kategoria	Nimitys 2.39
hTop	Homotopiakategoria	Esimerkki 2.43
$\mathbb{K}$-Vekt	Vektoriavaruuksien kategoria	

Taulukko 3: Kategoriioihin liittyvät merkinnät

Merkintä	Selitys	Määritelmä
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$	Kategoria	Määritelmä 2.34
$\dot{\mathcal{A}}$	Kategorian pisteiden luokka	Määritelmä 2.34
$\vec{\mathcal{A}}$	Kategorian nuolien luokka	Määritelmä 2.34
id_A	Pisteen A identiteettiinuoli	Määritelmä 2.34
$\vec{\mathcal{A}}(A, B)$	Luokka nuolia pisteestä A pisteeseen B	
$\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{A}^n$	Tulokategoria	Määritelmä 2.51
$F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$	Ylinuoli	Määritelmä 2.46
$F(A)$	Ylinuolen kuva pisteestä A	Määritelmä 2.46
$F(f)$	Ylinuolen kuva nuolesta f	Määritelmä 2.46
$\text{id}_{\mathcal{A}}$	Identiteettiynuoli	
$\text{pr}_{\mathcal{A}}$	Projektiynuoli	
$\alpha: F \Rightarrow G$	Luonnollinen muunnos	Määritelmä 2.50
$\alpha: F \Leftrightarrow G$	Luonnollinen samaistus	Määritelmä 2.56
α_A	Luonnollisen muunnoksen nuoli $F(A) \rightarrow G(A)$	Määritelmä 2.50
$\mathcal{A}_*$	Kantapisteellinen kategoria	
$\sim$	Kongruenssi	Määritelmä 2.40
$\mathcal{A}_{\sim}$	Tekijäkategoria	Määritelmä 2.41
$(\mathcal{A}, \square, E)$	Tarkka monoidinen kategoria	Määritelmä 2.54
$(\mathcal{A}, \square, E, \alpha, \lambda, \rho)$	Monoidinen kategoria	Määritelmä 2.57
$(\mathcal{A}, \square, E, \alpha, \lambda, \rho, \tau)$	Symmetrinen monoidinen kategoria	Määritelmä 2.62
(M, μ, η)	Monoidipiste	Määritelmä 2.60
(M, δ, ε)	Vastamonoidipiste	Määritelmä 2.61
$(M, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$	Frobeniuksen piste	Määritelmä 4.54

Topologia

Topologiaan liittyvät merkinnät on lueteltu taulukossa 4. Ne ovat lähes vakiintuneet lukuun ottamatta avoimen osajoukon merkintää $A \subseteq B$, joka on kuitenkin tavallinen suomenkielissä kirjallisuudessa.

Taulukko 4: Topologiaan liittyvät merkinnät

Merkintä	Selitys	Määritelmä
$\mathcal{X} = (X, \mathcal{T})$	Topologinen avaruus	
$\mathcal{T}$	Topologia	
$(\mathcal{X}, x_0)$	Kantapisteavaruus	
$\Omega(\mathcal{X}, x_0)$	Silmukkajoukko	
$f \simeq g$	Homotopia	Muistutus 2.42
$f \simeq g \text{ rel } A$	Suhteellinen homotopia	Muistutus 2.44
$\alpha \sim \beta$	Polkuhomotopia	Muistutus 2.47
$\pi_1(\mathcal{X}, x_0), \pi_1(\mathcal{X})$	Perusryhmä	Muistutus 2.48
$\pi_n(\mathcal{X}, x_0), \pi_n(\mathcal{X})$	Homotopiaryhmä astetta n	Määritelmä 3.47
f_*	Indusoitu homomorfismi	Muistutus 3.21
$f _A$	Rajoittuma	
$A \subseteq B$	Avoin osajoukko	
$\tilde{\mathcal{X}}$	Yleispeite	Määritelmä 3.19
$G_p(\mathcal{Y}), G(\mathcal{Y})$	Peiteryhmä	Määritelmä 3.27
(U, ϕ)	Kartta	Määritelmä 3.7
$\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$	Sileä kartasto	Määritelmä 3.9
$[\mathcal{X}; \mathcal{Y}]$	Kuvauksien $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ homotopialuokat	
$\Sigma^n(\partial I)$	Suspensio	
$\mathcal{P} = (\mathcal{P}', \mathcal{M}, \mathcal{N})$	Piena	Määritelmä 4.40
$\{\mathcal{X}_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$	Suodatus	Määritelmä 2.129

Solmut

Solmuteorian merkinnät vaihtelevat hyvin paljon eri lähteissä. Tässä työssä käytettävät merkinnät on esitelty taulukossa 5.

Taulukko 5: Solmuihin liittyvät merkinnät

Merkintä	Selitys	Määritelmä
X_K	Solmun K komplementti	Määritelmä 3.48
$\bar{X}_K$	Solmun komplementin ääretön syklinen peite	Merkintä 3.56
$\Delta_K(t)$	Alexanderin polynomi	Määritelmä 3.61
$\langle K \rangle$	Kauffmanin sulkeet	Määritelmä 4.1
$\langle K \rangle_*$	Uudelleen vakioitunut Kauffmanin sulkeet	Määritelmä 4.21
$\left[\begin{smallmatrix} \diagup & \diagdown \\ \diagdown & \diagup \end{smallmatrix} \right] (D)$	Oikeiden risteyksien määrä	Merkintä 4.5
$\left[\begin{smallmatrix} \diagdown & \diagup \\ \diagup & \diagdown \end{smallmatrix} \right] (D)$	Vasenten risteyksien määrä	Merkintä 4.5
$v(D)$	Vyyhde	Määritelmä 4.6
$\bar{J}(D)$	Sieventämätön Jonesin polynomi	Määritelmä 4.9
$\bar{K}(D)$	Uudelleen vakioitu sieventämätön Jonesin polynomi	Määritelmä 4.22
$J(D)$	Jonesin polynomi	Määritelmä 4.14
$K(D)$	Uudelleen vakioitu Jonesin polynomi	Määritelmä 4.22
$\llbracket D \rrbracket$	Hovanovin sulkeet	Määritelmä 4.62
$C^{\text{Hov}}(L)$	Hovanovin ketjukompleksi	Määritelmä 4.65
$H^{\text{Hov}}(L)$	Hovanovin homologia	Määritelmä 4.65

Algebra

Työssä käytettävät ryhmiiin ja renkaisiin liittyvät merkinnät on esitetty taulukoissa 6 ja 7. Ne ovat hyvin vakiintuneita. Sen sijaan osa muista käytettävistä algebran merkinnöistä poikkeavat eri lähteissä. Valitut merkintätavat näkyvät taulukossa 8.

Taulukko 6: Ryhmiin liittyvät merkinnät

Merkintä	Selitys	Määritelmä
$\leq$	Aliryhmä	
$\trianglelefteq$	Normaali aliryhmä	
$\langle v_1, \dots \mid r_1, \dots \rangle$	Ryhmän esitys	
$\langle v_1, \dots \rangle$	Vapaa ryhmä	
$\langle v_1, \dots \rangle_+$	Vapaa vaihdannainen ryhmä	
$\mathbb{Z}^n$	Vapaa n -ulotteinen vaihdannainen ryhmä	
$\mathbb{Z}_k$	Kertaluvun k syklinen ryhmä	
$G = \bigoplus_{k \in K} G_k$	Porrastettu ryhmä	Määritelmä 4.25
$\text{qdim}(G)$	Porrastettu ulottuvuus	Määritelmä 4.32
$\cdot \{n\}$	Porrastuksen siirto	Määritelmä 4.35
$\chi_q(G)$	Porrastettu Eulerin–Poincarén tunnus	Määritelmä 4.37

Taulukko 7: Renkaiisiin liittyvät merkinnät

Merkintä	Selitys	Määritelmä
$(R, +, \cdot)$	Rengas	
$(M, +)$	Moduli	Muistutus 2.15
$\langle a, b, \dots \rangle$	Ideaali	Muistutus 2.1
$R^{(I)}$	Luonnollisien modulien suora summa	Lause 2.20
$\text{Ann}_R(N)$	Hävittäjä	Määritelmä 2.32
$\text{ord } M$	Äärellisviritteisen kiertymämodulin aste	Määritelmä 3.61

Taulukko 8: Muut algebralliset merkinnät

Merkintä	Selitys	Määritelmä
$a \mid b$	Alkio a jakaa alkion b	Määritelmä 2.4
$A, (A, d)$	Ketjukompleksi	Määritelmä 2.63
$Z_n(A)$	n -syklit	Merkintä 2.73
$B_n(A)$	n -reunat	Merkintä 2.73
$H_n(A)$	Homologiaryhmä	Määritelmä 2.74
$H_n(\mathcal{X})$	Kolmionhomologiaryhmä	Määritelmä 2.96
$H_n(\mathcal{X}, A)$	Suhteellinen kolmionhomologiaryhmä	Määritelmä 2.102
$f_\#$	Indusoitu ketjukuvaus	Määritelmä 2.97
$\Delta_n = [k_0, \dots, k_n]$	n -kolmio	Määritelmä 2.78
$[k_0, \dots, \cancel{k_i}, \dots, k_n]$	n -kolmion sivu	Määritelmä 2.79
$\partial \Delta_n$	n -kolmion reuna	Määritelmä 2.82
$\overset{\circ}{\Delta}_n$	n -kolmion sisus	Määritelmä 2.115
G_n^Δ	Kolmioryhmä astetta n	Määritelmä 2.118
$R[x^{\pm 1}]$	Laurentin polynomi	Määritelmä 3.60
$\chi(K)$	Eulerin–Poincarén tunnus	Määritelmä 2.113
$\langle -, - \rangle$	Kaksoislineaarimuoto	Määritelmä 4.51
(A, β)	Frobeniuksen algebra	Määritelmä 4.53
$\text{colim}_{k \rightarrow \infty}$	Vastaraja	Merkintä 4.41
$\mathbb{R} \rightarrow \infty$	Reaaliavaruuksien vastaraja	Merkintä 4.41
$\cdot [k]$	Korkeussiirto	Merkintä 4.64

Lyhenteet

Käytettävät lyhenteet on esitetty taulukossa 9.

Taulukko 9: Lyhenteet

Lyhenne	Selitys
engl.	Englanniksi
lat.	Latinaksi
m.kreik.	Muinaiskreikaksi
ransk.	Ranskaksi
saks.	Saksaksi

Siirtokirjoitus ja vierasperäiset nimet

Yleisenä periaatteena työssä noudatetaan Kotimaisten kielten keskuksen julkaisemia ohjeita. Esimerkiksi venäjän kielen siirtokirjoituksessa suomen, ruotsin ja englannin käytännöt poikkeavat toisistaan. Siksi vaikkapa nimi *Михаил Гелиевич Хованов* kirjoitetaan suomeksi *Mihail Gelijevits̄ Hovanov*, ruotsiksi *Michail Gelijevitj Chovanov* ja englanniksi *Mikhail Geliyevich Khovanov*.

Nimien taivutuksessa pyritään huomioimaan niiden alkuperäinen ääntämisasu. Kuitenkin erityisesti nimen *Euler* taivutus voitaisiin perustellusti muodostaa sekä sidevokaalilla *i* että heittomerkillä. Tässä työssä käytetään vokaalillista muotoa, jolloin vaikkapa genetiivi olisi *Eulerin* eikä *Euler'n*. Tähän valintaan on päädytty kolmesta eri syystä. Ensinnäkin muoto *Eulerin* on vakiintunut suomenkielisessä matemaattisessa kirjallisuudessa. Toisekseen, vaikka nimen nykysaksan mukainen ääntämysasu (IPA: [ˈʊlə]) päättyykin vokaaliin, niin taivutusmuotojen ääntämyksessä lopun *r* kuitenkin ääntyy useilla suomenkielisillä puhujilla. Viimeinen syy on, että mikäli halutaan ääntää Eulerin nimi käyttäen hänen kotikaupunkinsa Baselin murteen 1700-luvun muotoa, niin ääntämysasu olisi mahdollisesti päättynyt konsonanttiin (IPA: [*aɪləʁ], [*ˈeɪləʁ], [*aɪləχ] tai [*ˈeɪləχ]). Vastaavasti nimestä *Laurent* (IPA: [lɔʁɑ̃]) valitaan käytettäväksi taivutusmuoto *Laurentin* muodon *Laurent'n* sijasta.

Klassiset kielet

Osa käytettävästä nimistöstä pohjautuu muinaiskreikkaan tai latinaan. Muinaiskreikan osalta työssä pyritään käyttämään sen klassisen kauden Attikan murteen vanhoillista ja ylättyylistä muotoa. Latinan osalta pyritään noudattamaan niin ikään klassista kieltä, joka pohjautuu latinan kultakauden ylättyyliseen muotoon. Esimerkiksi käytetään muotoa *moduli* muodon *moduuli* sijaan, koska klassisessa latinassa 'u' ääntyi lyhyenä sanassa *modulus*. Vastaavasti tekstissä mainitaan raamin synonyyminä *simplikiaaninen* kompleksiksi eikä esimerkiksi *simplitsiaaninen* tai *simplisiaaninen*, koska latinan sanoissa *simplices* ja *complexus* kirjain 'c' ääntyy klassisesti 'k'-ääntenä.

1 Johdanto

Solmuteorian ydinkysymyksenä on selvittää, mitkä solmut ovat keskenään samanlaisia. Kysymys on äärimmäisen monimutkainen, ja vaikka solmuja on tutkittu ainakin kahdensadan vuoden ajan, niin vieläkö ei tunneta mitään yksinkertaisesti laskettavaa solmutunnusta, joka pystyisi erottelemaan kaikki eri solmut toisistaan.

Työn tavoitteena on esitellä 1990-luvun lopulla löydetty Hovanovin homologia. Siitä voidaan johtaa useita erotteluvoimaisia solmutunnuksia, joiden ominaisuudet ovat edelleen aktiivisen tutkimuksen kohteena. Hovanovin homologia pohjautuu laajalle määrälle homologisten algebran ja solmuteorian tuloksia, joista oleellisin käydään työssä läpi.

Ensimmäinen varsinainen luku eli luku 2 keskittyy homologisten algebran perusteisiin. Se jakautuu neljään alalukuun. Alaluvussa 2.1 käydään läpi modulien teorian peruskäsitteitä ja sen päätuloksena on pääideaalirenkaan yli määriteltyjen äärellisviritteisten modulien rakennelause, jota tarvitaan Alexanderin polynomin muodostamisessa. Alaluku 2.2 sisältää kategorioteorian peruskäsitteiden kuten ylinuolen ja luonnollisen muutoksen lisäksi katsauksen monoidisiin kategorioihin, joille määriteltävien monoidipisteiden erikoistapauksena ovat muun muassa Frobeniuksen algebrat. Kolmannessa alaluvussa 2.3 keskitytään ketjukomplekseihin, jotka muodostavat perustan alaluvussa 2.4 määriteltävälle homologicalle. Yleisen homologian lisäksi tutustutaan kolmiohomologiaan ja sen kolmeen muotoon eli yleiseen kolmiohomologiaan, yksinkertaiseen kolmiohomologiaan ja soluhomologiaan.

Luvussa 3 käydään läpi solmuteorian perusteet. Alaluvun 3.1 sileät monistot toimivat teknisinä työkaluina ja varsinkin solmujen myöhemmän vaiheen määrittely sileinä upotuksina yksinkertaistaa niiden käsittelyä. Alaluku 3.2 on omistettu peiteavaruuksille ja käsittelyn kohteena ovat muiden muassa yleispeitteet, peitemuunnokset ja peiteryhmät. Avaruuden peiteavaruudet voidaan kauniilla tavalla tulkita sen perusryhmän aliryhminä ja lisäksi säännöllisten peiteavaruuksien tapauksessa perusryhmän tekijäryhmät ja sitä vastaavat peiteryhmät ovat isomorfiset. Alaluvussa 3.3 käydään lyhyesti läpi solmujen käsitteistö ja näytetään esimerkinomaisesti, kuinka kolmivärittyvyys muodostaa solmutunnuksen. Viimeinen alaluku 3.4 käsittelee vanhinta tunnettua polynomimuotoista solmutunnusta eli Alexanderin polynomia. Se yhdistää suuren osan työn käsitteistä, kun solmun Seifertin pinnasta muodostetaan ääretön syklinen peite, jonka ensimmäisestä homologiaryhmästä voidaan modulien rakennelauseen avulla koota solmutunnus.

Luku 4 pureutuu työn päätulokseen eli Hovanovin homologiaan. Sen ensimmäinen alaluku 4.1 käsittelee vuonna 1984 löydettyä Jonesin polynomia, joka voidaan muodostaa yksinkertaisemmin kuin Alexanderin polynomi. Jonesin polynomi muodostetaan Kauffmanin sulkeiden avulla ja se kirjoitetaan Hovanovin homologian kannalta hedelmälliseen muotoon oioskaavioksi. Alaluvussa 4.2 jatketaan solmukaavion oioskuution tarkastelua ja liitetään siihen porrastettuja vektoriavaruuksia niin, että niiden porrastetut ulottuvuudet vastaavat Jonesin polynomia. Hovanovin homologian ajatus perustuu siihen, että oioskuutiosta voidaan palauttaa aidosti vahvempi solmutunnus kuin Jonesin polynomi. Tätä varten solmukaavion oiotut muodot yhdistetään toisiinsa pienoilla. Näin saatu kaavio voidaan kuvata porrastetuiksi vektoriavaruuksiksi ja niiden väliseksi Frobeniuksen algebran toteutaviksi kuvauksiksi. Lopulta muodostuneelle rakenteelle voidaan määrittellä Hovanovin sulkeet. Kun ne kerrotaan tarkkaan valituilla termeillä, niin saadaan solmun eri kaavioista riippumaton solmutunnus, Hovanovin homologia. Viimeisessä alaluvussa 4.3 mainitaan

lyhyesti Hovanovin homologian yhteydestä yleisiin topologisiin kvanttikenttäteorioihin.

Työ pohjautuu laajaan joukkoon eri lähde-teoksia. Erityismaininnan ansaitsevat viisi teosta. Hovanovin homologian lähteet ovat Jacob Rasmussenin *Knots, polynomials, and categorification*[30] ja Dror Bar-Natanin artikkeli *On khovanov's categorification of the jones polynomial*[4]. Allen Hatcherin *Algebraic topology* [11] sekä Joseph J. Rotmanin *An introduction to algebraic topology*[32] toimivat perusteoksina varsinkin homologioiden ja peiteavaruuksien alaluvuissa. Lisäksi Joachim Kockin kirjoittama *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories*[20] tarjoaa perustan pienen ja Frobeniuksen algebran määrittelyyn.

2 Homologisen algebran perusteet

2.1 Moduli

Modulien ominaisuuksilla on olennainen osa työn myöhemmissä vaiheissa kuten Alexanderin polynomin muodostamisessa. Alaluvussa 2.1.1 käsitellään renkaiden yleisiä jaollisuusominaisuuksia. Ne mahdollistavat sellaisten minimivaatimusten asettamisen modulien kerroinrenkaille, että niitä vastaaville moduleille voi ylipäätään muodostua yleispätevä yksinkertainen rakenne. Alaluvussa 2.1.2 laajennetaan useita vektoriavaruuksista tuttuja käsitteitä moduleille ja kerrotaan, kuinka osa moduleista voidaan esittää virittäjien ja sääntöjen avulla. Alaluku 2.1.3 yhdistää nämä havainnot äärellisviritteisien modulien rakennelauseeksi, joka on yleistys vastaavasta vaihdannaisien ryhmien lauseesta.

2.1.1 Jaollisuus renkaissa

Kokonaisluvuille tuttuja jaollisuussääntöjä ja -ominaisuuksia voidaan yleistää useille muillekin renkailla. Selkeyden vuoksi säännöt esitetään usein ideaalimuodossa, koska varsinkin renkaissa, joissa on monimutkainen yksiköiden joukko, alkionuoto voi olla epäluonnollinen.

Muistutus 2.1. (Ideaali) Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas ja $A \leq (R, +)$ sen yhteenlaskuryhmän aliryhmä. Jos kaikilla $a \in A$ ja $r \in R$ on voimassa

$$ra \in A \quad \text{ja} \quad ar \in A,$$

niin A on renkaan R kaksipuoleinen ideaali.

 [15, s. 17]

Muistutus 2.2. (Kokonaisalue) Olkoot x ja y vaihdannaisen renkaan R alkioita. Jos ehdosta $x \cdot y = 0$ seuraa, että $x = 0$ tai $y = 0$, niin R on kokonaisalue.

 [15, s. 13]

Muistutus 2.3. (Pääideaali) Olkoon $(R, +, \cdot)$ kokonaisalue. Yhden alkion $x \in R$ virittämää ideaalia $\langle x \rangle = \{rx \mid r \in R\}$ kutsutaan pääideaaliksi.

 [15, s. 47]

Määritelmä 2.4. (Jaollisuuden peruskäsitteet) Olkoon R kokonaisalue ja olkoot a, b, p ja u sen alkioita. Tällöin:

- Alkio u on yksikkö, kun $\langle u \rangle = \langle 1 \rangle$.
- Alkio a on alkion b jakaja, kun $\langle b \rangle \leq \langle a \rangle$.
- Alkio a on alkion b aito jakaja, kun $\langle b \rangle < \langle a \rangle < \langle 1 \rangle$.
- Alkio a on jaoton, kun sillä ei ole aitoa jakajaa.
- Alkio p on alkualkio, kun ehdosta $ab \in \langle p \rangle$ seuraa, että $p \in \langle a \rangle$ tai $p \in \langle b \rangle$.
- Alkiot a, b ovat liittoalkiot, kun $\langle b \rangle = \langle a \rangle$.

Jaollisuutta voidaan merkitä myös muodossa $a \mid b$.

 [2, s. 360]

Esimerkki 2.5. Kokonaislukujen renkaassa luku 2 jakaa luvun 6, koska

$$\langle 6 \rangle = \{ \dots, -6, 0, 6, 12, \dots \} \leq \{ \dots, -2, 0, 2, 4, 6, \dots \} = \langle 2 \rangle.$$

Yksi tärkeimmistä positiivisten kokonaislukujen jaollisuusominaisuuksista on alkutekijähajotelma, joka on yksikäsitteinen aritmetiikan peruslauseen nojalla. Kun negatiiviset kokonaisluvut otetaan mukaan, alkutekijähajotelma on edelleen yksikäsitteinen tekijöiden etumerkkejä lukuun ottamatta. Esimerkiksi hajotelmat $6 = 2 \cdot 3$ ja $6 = (-2)(-3)$ ovat oleellisesti samat. Yleisessä tapauksessa rakennetta, jossa tekijöihinjako voidaan tehdä yksikäsitteisesti, kutsutaan tekijöihinjakorenkaksi. Tällöinkin tekijät katsotaan samoiksi, jos ne ovat toistensa liittoalkiot.

Menetelmä 2.6. (*Tekijöihinjako*) Olkoon R kokonaisalue ja olkoon $a \in R$ sen nollasta eroava alkio, joka ei ole myöskään yksikkö. Silloin se voidaan jakaa tekijöihin kaksivaiheisesti:

1. Jos alkio a on jaoton, sen tekijäesitys on a . Muussa tapauksessa se voidaan jakaa tekijöihin $a = a_1 a_2$, jotka eivät ole yksiköitä.
2. Jos tekijäesityksessä on yksikin jaollinen alkio a_i , niin toistetaan ensimmäinen vaihe sille.

Jos tekijöihinjako päättyy, niin saadaan tekijäesitys $a = a_1 a_2 \cdots a_n$.  [2, s. 364]

Määritelmä 2.7. (*Tekijöihinjakorengas*) Olkoon R kokonaisalue. Se on tekijöihinjakorengas, jos sen jokaisella nollasta poikkeavalla alkiolla on päättävä tekijöihinjako, joka on tekijöiden järjestystä ja niiden liittoalkioita vaille yksikäsitteinen.  [2, s. 364]

Kokonaislukujen tapauksessa alkulukujen ja jaottomien lukujen käsitteet ovat samat ja sama pätee kaikissa tekijöihinjakorenkaissa. On kuitenkin olemassa kokonaisalueita, joissa kaikki jaottomat alkio eivät ole alkualkioita. Esimerkiksi renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ alkio 6 voidaan jakaa sekä muodossa $6 = 2 \cdot 3$ että muodossa $6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$. Siispä vaikka alkio 2 on jaoton, niin se ei ole alkualkio, koska se ei jaa kumpaakaan alkion 6 jälkimmäisen esityksen tekijää [2, s. 365].

Yhden tärkeän tekijöihinjakorenkaiden tyypin muodostavat pääideaalirenkaat. Sen lisäksi, että pääideaalirenkaan ehto on yleensä helpompi tarkistaa kuin tekijöihinjakorenkkaan ehto, niin siinä on aina voimassa Bézout'n yhtälö, jonka mukaan lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on muotoa $ax + by$.

Muistutus 2.8. (*Suurin yhteinen tekijä*) Olkoon R kokonaisalue ja olkoot a ja b sen alkioita. Niiden yhteiseksi tekijäksi kutsutaan alkioita c , joka jakaa ne molemmat. Jos on olemassa alkioiden a ja b yhteinen tekijä d , jonka kaikki muut yhteiset tekijät jakavat, niin se on *suurin yhteinen tekijä*. Sitä merkitään $\text{sy}(a, b) = d$.  [2, s. 362]

Muistutus 2.9. (*Pääideaalirengas*) Kokonaisalue R on *pääideaalirengas*, kun sen kaikki ideaalit ovat pääideaaleja.  [15, s. 47]

Jaollisuuden tarkastelua voidaan jatkaa jakoyhtälöön. Tavoitteena on kirjoittaa alkio a alkion b avulla muodossa $a = kb + j$ niin, että jäännösalkio j on pienempi kuin b . Tätä varten tarvitaan tapa mitata alkioiden suuruutta.

Määritelmä 2.10. (*Eukleideen kuvaus*) Olkoon R kokonaisalue ja olkoon $\sigma: R \rightarrow \mathbb{N}$ kuvaus. Jos mielivaltaisille alkioille a ja $b \neq 0$ on olemassa alkio k ja j , joille $a = kb + j$ ja $\sigma(j) < \sigma(b)$ tai $j = 0$, niin σ on renkaan R Eukleideen kuvaus.  [15, s. 84]

Määritelmä 2.11. (*Eukleideen rengas*) Kokonaisalue R on Eukleideen rengas, jos sille on olemassa Eukleideen kuvaus.  [15, s. 84]

Esimerkki 2.12. Kokonaisluvut ovat Eukleideen rengas, kun Eukleideen kuvauksena käytetään itseisarvoa.

Viimeinen tässä alaluvussa mainittava renkaiden tyyppi on kunta. Kuntien jaollisuusominaisuudet ovat niin hyvät, että jaollisuuden käsitteestä tulee triviaali: kuntien jokainen nollasta poikkeava alkio on yksikko ja siten ne kaikki jakavat toisensa. Kaikkien käsiteltyjen rengastyyppejen suhteet toisiinsa on esitetty lauseessa 2.14.

Muistutus 2.13. (*Kunta*) Vaihdannainen rengas $(R, +, \cdot)$ on kunta, kun $(R \setminus 0, \cdot)$ on vaihdannainen ryhmä.  [15, s. 5]

Lause 2.14. (*Renkaiden luokittelu*) Renkaat voidaan luokitella ominaisuuksiensa perusteella alati paremmin käyttäytyviin tyyppeihin:

$$\begin{aligned} \text{Rengas} \supset \text{Vaihdannainen rengas} \supset \text{Kokonaisalue} \supset \text{Tekijöihinjakorengas} \\ \supset \text{Pääideaalirengas} \supset \text{Eukleideen rengas} \supset \text{Kunta}. \end{aligned}$$

Siispä esimerkiksi Eukleideen rengas on aina myös tekijöihinjakorengas.  [15, s. 84] $\square$

2.1.2 Modulin esitys

Modulit ovat vektoriavaruuksien yleistyksiä, jossa kerroinkunta on korvattu renkaalla. Monia vektoriavaruuksien käsitteitä voidaan soveltaa moduleille tietyin rajoituksin.

Muistutus 2.15. (*Moduli*) Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas, joka koostuu vaihdannaisesta ryhmästä $(R, +)$ ja monoidista $(R, \cdot)$. Vaihdannaista ryhmää $(M, +_2)$ kutsutaan R -moduliksi, kun sille on määritetty kerroinrenkaan R vasen toiminta eli *skalaarikertolasku*:

$$(M1) \quad 1.x = x$$

$$(M2) \quad (ab).x = a.(b.x)$$

$$(M3) \quad (a + b).x = a.x +_2 b.x$$

$$(M4) \quad a.(x +_2 y) = a.x +_2 a.y,$$

jossa $1, a, b \in R$ ja $x, y \in M$. Yleensä kumpaakin pluslaskua merkitään samalla merkillä ja skalaarikertolaskun piste jätetään merkitsemättä tai siitä käytetään samaa merkkiä kuin renkaan kertolaskusta.  [15, s. 54]

Vektoriavaruuksien kannan käsite voidaan yleistää muillekin moduleille. Mutta toisin kuin vektoriavaruuksien tapauksessa, kaikille moduleille ei löydy kantaa. Kannallisia moduleita kutsutaan vapaiksi moduleiksi.

Muistutus 2.16. (*Vapaus*) Olkoon M renkaan R moduli ja $X \subset M$ sen osajoukko. Merkitään renkaan alkioita $r_i \in R$ ja osajoukon alkioita $x_i \in X$. Joukko X on *vapaa*, kun $\sum_{i=0}^n r_i x_i = 0$ vain, jos $r_i = 0$ kaikilla indekseillä i .  [15, s. 60]

Muistutus 2.17. (*Kanta*) Kun M on R -moduli, niin osajoukko $B \subset M$ on sen *kanta*, kun se on vapaa ja se virittää modulin M .  [15, s. 60]

Määritelmä 2.18. (*Vapaa moduli*) Moduli M on *vapaa R -moduli*, jos sille on olemassa kanta.  [15, s. 60]

Osoittautuu, että jokainen vapaa R -moduli voidaan esittää suorana summana luonnollisista R -moduleista.

Nimitys 2.19. (*Luonnollinen moduli*) Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas. Sen voidaan ajatella *luonnollisena modulina* R käyttämällä skalaarikertolaskuna renkaan omaa kertolaskua.

Lause 2.20. Jokainen vapaa moduli M voidaan esittää muodossa $M \cong R^{(I)}$, jossa I on indeksijoukko ja $R^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} R$ on luonnollisten modulien suora summa.  [15, s. 61] $\square$

Useat modulit voidaan esittää virittäjien ja sääntöjen avulla. Koska on mahdollista, että jopa äärellisviritteisellä modulilla ei olisi äärellistä sääntöjoukkoa, niin tarvitaan lisävaatimus, jolla tällaisista huonosti käyttäytyvistä tapauksista päästäisiin eroon. Siksi modulien äärellistä esitystä varten renkaat on rajattava Noetherin renkaisiin.

Määritelmä 2.21. (*Noetherin rengas*) Rengas R on *Noetherin rengas*, jos sen jokainen ideaali on äärellisviritteinen. Yhtäpitävä ehto on, että renkaalla ei ole ääretöntä aidosti nousevaa ideaalien jonoa $I_0 < I_1 < \dots$.  [2, s. 427]

Lause 2.22. Olkoon R Noetherin rengas. Tällöin jokaisen äärellisviritteisen R -modulin alimoduli on äärellisviritteinen.  [2, s. 427] $\square$

Tärkeä erikoistapaus Noetherin renkaista ovat pääideaalirenkaat.

Lause 2.23. Pääideaalirenkaat ovat Noetherin renkaita.  [2, s. 427] $\square$

Modulien esitys pohjautuu vapaiden modulien tekijämoduleihin. Käytännössä vapaan modulin kanta-alkioille asetetaan tiettyjä rajoituksia, jotka voidaan esittää matriisimuodossa.

Määritelmä 2.24. (*Esitysmatriisi*) Olkoon R rengas ja olkoon $A: R^n \rightarrow R^m$ sen vapaiden modulien välinen lineaarikuvaus. Matriisia A kutsutaan tekijämodulin $V = R^m/A[R^n]$ esitysmatriisiksi. Tässä $A[R^n] = \text{Im } A$ on lineaarikuvauksen kuva.  [2, s. 423]

Esimerkki 2.25. Olkoon $A: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ se kokonaislukujen luonnollisten modulien välinen kuvaus, jossa $A = [3]$ on 1×1 -matriisi. Sen kuva on $3\mathbb{Z}$, jolloin se virittää tekijämodulin $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, joka vastaa kolmen alkion syklistä ryhmää.

2.1.3 Äärellisviritteisten modulien rakennelause

Osoittautuu, että jokainen moduli, jonka kertoimena on pääideaalirengas ja joka on äärellisviritteinen, voidaan esittää suorana summana vapaasta modulista ja kiertymämoduleista. Tulos on yleistys äärellisviritteisten vaihdannaisien ryhmien rakennelauseesta.

Lause 2.26. (*Äärellisviritteisien vaihdannaisien ryhmien rakennelause*) Olkoon G äärellisviriteinen vaihdannainen ryhmä. Se voidaan esittää muodossa

$$G \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_n},$$

jossa $\mathbb{Z}^n$ on n -ulotteinen vapaa vaihdannainen ryhmä ja jossa $\mathbb{Z}_{k_i} = \mathbb{Z}/k_i\mathbb{Z}$ ovat syklisiä ryhmiä kertalukua $k_i > 1$, joille k_i jakaa kertaluvun k_{i+1} kaikilla i . Vaihtoehtoisesti

$$G \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}},$$

jossa kertaluvut $p_i^{\alpha_i}$ ovat alkulukupotensseja.

 [2, s. 430]

Jokainen vaihdannainen ryhmä $(G, +)$ voidaan esittää $\mathbb{Z}$ -modulina, jonka skalaarikertolaskuna on $kg = g + \dots + g$, jossa g on summattu k kertaa. Vastaavasti jokainen $\mathbb{Z}$ -moduli saadaan vaihdannaiseksi ryhmäksi poistamalla skalaarikertolasku. Siksi onkin luonnollista tutkia rakennelauseen 2.26 vastaavuutta myös muille moduleille.

Lauseessa esiintyvien syklisten ryhmien yleistys ovat kiertymämodulit, jotka kuvaavat niitä moduliryhmän alkioita, jotka voidaan skalaarikertolaskulla saada nolaksi. Kiertymästä käytetään myös nimitystä torsio (lat. *torquere*).

Määritelmä 2.27. (*Kiertymäalkio*) Olkoon M moduli, jonka kerroinrenkas R on kokonaisalue. Alkio $x \in M$ on *kiertymäalkio*, jos on olemassa $r \in R$, joka ei ole nolla ja jolle $rx = 0$.

 [12, s. 26]

Merkintä 2.28. (*Kiertymäjoukko*) Moduln M kaikkien kiertymäalkioiden joukkoa merkitään $\text{Tor}_R(M)$, jossa R on moduln kerroinrenkas.

 [12, s. 26]

Määritelmä 2.29. (*Kiertymämoduli*) Olkoon M kokonaisalueen R moduli. Jos sen jokainen alkio on kiertymäalkio, niin M on *kiertymämoduli*.

 [12, s. 26]

Vapaata vaihdannaista ryhmää vastaa vapaa moduli. Se on kiertymätön moduli. Vaikka kaikki vapaat modulit ovat kiertymättömiä, niin useat kiertymättömät modulit eivät ole vapaita.

Määritelmä 2.30. (*Kiertymätön moduli*) Kokonaisalueen R moduli M on *kiertymätön*, jos $\text{Tor}_R(M) = \{0\}$.

 [12, s. 26]

Lause 2.31. Kokonaisalueen R vapaa moduli M on kiertymätön.

 [12, s. 26] $\square$

Kun vaihdannainen ryhmä kirjoitetaan modulimuodossa, on mahdollista, että joillain luvuilla skalaarikertominen antaa tulokseksi nolla kaikilla moduln alkioilla. Esimerkiksi kolmen alkion syklisen ryhmän $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ alkioiden kertominen millä tahansa kolmella jaollisella kokonaisluvulla tuottaa nollan. Nämä luvut muodostavat ideaalin kokonaislukujen renkaalle. Yleisessä tapauksessa tämän tyyppistä ideaalia kutsutaan hävittäjäksi tai joskus myös annihilaattoriksi (lat. *annihilatio*).

Määritelmä 2.32. (*Hävittäjä*) Olkoon M kokonaisalueen R moduli. Alimodulin $N \subset M$

hävittäjä on

$$\text{Ann}_R(N) = \{r \in R \mid rn = 0, \text{ kaikilla } n \in N\}.$$

Se on kokonaisalueen R ideaali.

 [12, s. 28]

Lopuksi äärellisviretteinen moduli olisi pilkottava osiin. Tätä varten sen kerroinrenkaan on oltava pääideaalirengas eli siten myös Noetherin rengas ja tekijöihinjakorengas. Osoittautuu, että moduli voidaan jakaa kiertymättömään osaan, joka on tässä tapauksessa vapaa moduli sekä kiertyneeseen osaan. Kiertynyt osa voidaan edelleen jakaa pääideaalien avulla suoraksi summaksi, jonka osien virittäjät voidaan järjestää samalla tavalla kuin ryhmien tapauksessa sellaiseksi jonoksi, jonka jäsenet joko jakavat seuraajansa tai ovat alkulukupotensseja.

Lause 2.33. (*Äärellisviritteisien modulien rakennelause*) Pääideaalirenkaan R yli määritelty äärellisviritteinen moduli M voidaan esittää isomorfisesti suorana summana

$$M \cong R^n \oplus R/\langle k_1 \rangle \oplus R/\langle k_2 \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle k_m \rangle.$$

Vapaan modulin aste on luonnollinen luku $n \in \mathbb{N}$. Kertoimet $k_i \in R$ ovat nollasta poikkeavia ja niiden jokaisen on jaettava seuraajansa eli $k_1 \mid k_2 \mid \cdots \mid k_m$. Vaihtoehtoisesti rakennelause voidaan esittää muodossa

$$M \cong R^n \oplus R/\langle p_1^{\alpha_1} \rangle \oplus R/\langle p_2^{\alpha_2} \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle p_m^{\alpha_m} \rangle,$$

jonka kertoimet $p_i^{\alpha_i}$ ovat alkulukupotensseja.

 [7, s. 462] $\square$

2.2 Kategoria

Tässä työssä käytetään lähtökohtaisesti kategoriateoreettista lähestymistapaa. Tämän vuoksi useat tutut määritelmät muotoillaan uudelleen ja esitetään kaavioiden avulla. Erityisen tarpeelliseksi kategoriat osoittautuvat, kun tutkitaan Hovanovin homologian taustalla olevaa topologista kvanttikenttäteoriaa.

Alaluvussa 2.2.1 käydään läpi kategoriateorian perusmääritelmät ja -merkinnät kuten ylinuoli ja luonnollinen muunnos. Alaluku 2.2.2 keskittyy monoidisen kategorian määrittelyyn, joka on tärkeä muun muassa pienoisten ja Frobeniuksen algebrien yhteydessä.

2.2.1 Luonnollinen muunnos

Kategoriateorian merkinnät ja nimitykset vaihtelevat eri teoksissa, joten on syytä kerrata osa tärkeimmistä peruskäsitteistä. Erityisen merkillepantavaa on kategorian nuolten liitoksen merkitseminen samassa järjestyksessä kuin ne esiintyvät kaavioissa. Siispä vaikkapa $f \star g$ tarkoittaa yhdistettyä kuvausta $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Tämä poikkeaa ennen kategoriateorian keksimistä vakiintuneesta käytännöstä, jossa liitosta merkittiin tavanomaisesti $g \circ f$ tai gf . Jotta käänteinen merkintätapa ei sekoittuisi vanhaan tapaan, niin siitä käytetään pienen ympyrän sijasta pientä tähteä.

Määritelmä 2.34. (*Kategoria*) *Kategoria* $\mathcal{A}$ muodostuu luokasta pisteitä $\mathcal{A}$ ja luokasta pisteiden välisiä *nuolia* $\mathcal{A}$, joille on voimassa:

1. Jokaisella nuolella f on *alkupiste* A ja *loppupiste* B .
2. Nuolten f ja g *liitos* $f * g$ on määritelty täsmälleen silloin, kun nuolet ovat yhteensopivia eli nuolen f loppupiste on sama kuin nuolen g alkupiste.
3. Jokaiselle pisteelle A löytyy *identiteettinuoli* id_A , jonka alku- ja loppupiste on A ja jolle pätee $\text{id}_A * f = f$ ja $g * \text{id}_A = g$ kaikilla sen kanssa yhteensopivilla nuolilla f ja g .
4. Nuolet ovat *liitännäiset* eli yhtälö $(f * g) * h = f * (g * h)$ on voimassa kaikilla yhteensopivilla nuolilla f, g ja h .  [14, s. 5]

Esimerkki 2.35. Joukkojen kategorian **Joukko** pisteet ovat joukkoja ja nuolet niiden välisiä kuvauksia. Nuolien liitoksena on yhdistetty kuvaus.

Esimerkki 2.36. Topologisien avaruuksien kategorian **Top** pisteet ovat topologisia avaruuksia ja nuolet niiden välisiä jatkuvia kuvauksia. Koska kahden jatkuvan kuvauksen yhdiste on jatkuva, niin nuolien liitoksena on yhdistetty kuvaus joukkojen kategorian tapaan.

Esimerkki 2.37. Ryhmien kategorian **Ryhmä** pisteet ovat ryhmiä ja nuolet niiden välisiä ryhmähomomorfismeja. Nuolien liitoksena on homomorfismien yhdiste. Vaihdannaisien ryhmien kategoria **Ab** on ryhmien kategorian alikategoria, jossa rajoitutaan ainoastaan vaihdannaisiin ryhmiin ja niiden välisiin ryhmähomomorfismeihin.

Tavanomaisista kategorioista voidaan eräissä tapauksissa muodostaa uusia kategorioita asettamalla jokin alirakenne erityisasemaan. Tyypiesimerkkinä on kantapisteavaruuksien kategoria, joka saadaan valitsemalla jokaiselle topologiselle avaruudelle kantapiste. Se on helpointa määritellä erikoistapauksena topologisien avaruusparien kategoriasta.

Nimitys 2.38. (*Topologisien avaruusparien kategoria*) Olkoon $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ sen aliavaruus. Ne muodostavat parin $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Muodostetaan *topologisien avaruusparien kategoria* **Top²** valitsemalla pisteiden luokaksi kaikki edellistä muotoa olevat avaruusparit. Kategorian nuolet ovat sellaiset parit jatkuvia kuvauksia (f, f') , joille kaavio (1) on vaihdannainen.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xhookrightarrow{i} & \mathcal{X} \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ \mathcal{B} & \xhookrightarrow{j} & \mathcal{Y} \end{array} \quad (1)$$

Käytännössä kuitenkin kategorian **Top²** voidaan ajatella muodostuvan pareista $(\mathcal{X}, A)$, jossa aliavaruuden luonne topologisena avaruutena jätetään merkitsemättä ja sitä tarkastellaan vain joukkona. Tällöin pisteiden $(\mathcal{X}, A)$ ja $(\mathcal{Y}, B)$ välinen nuoli (f, f') voidaan ajatella yhtenä kuvauksena $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, jossa $f[A] \subset B$.  [32, s. 8]

Nimitys 2.39. (*Kantapisteavaruuksien kategoria*) Kun topologisien avaruusparien kategoriassa rajoitutaan sellaisiin pareihin, joiden aliavaruuksina ovat yksittäiset pisteet, saadaan *kantapisteavaruuksien kategoria* **Top_{*}**. Sen pisteinä ovat siten kantapisteavaruudet $(\mathcal{X}, x_0)$ ja nuolina kuvaukset $f: (\mathcal{X}, x_0) \rightarrow (\mathcal{Y}, y_0)$, joille $f(x_0) = y_0$.  [32, s. 8]

Toinen tapa muodostaa uusia kategorioita olemassa olevista kategorioista on niiden rajaaminen tekijäkategorioiksi. Tällöin kategorian nuolien luokkaan määritellään kongruenssi,

jossa tietyt nuolet asetetaan yhtäpitäviksi. Näin voidaan rajoittaa tekijäkategoriaan, jonka nuolet ovat alkuperäisen kategorian nuolten ekvivalenssiluokkia kongruenssin suhteen.

Nimitys 2.40. (*Kongruenssi*) Olkoon $\mathcal{A}$ kategoria ja olkoon $\sim$ sen nuolien luokassa $\vec{\mathcal{A}}$ määritelty ekvivalenssirelaatio, jolle on voimassa kaksi ehtoa:

1. Jos $f \in \vec{\mathcal{A}}(A, B)$ ja $f \sim f'$, niin myös $f' \in \vec{\mathcal{A}}(A, B)$.
2. Jos f ja g ovat yhteensopivat ja sekä $f \sim f'$ että $g \sim g'$, niin $f \star g \sim f' \star g'$.

Tällöin $\sim$ on *kongruenssi* kategoriassa $\mathcal{A}$.

 [32, s. 9]

Määritelmä 2.41. (*Tekijäkategoria*) Olkoon $\mathcal{A}$ kategoria ja $\sim$ sen kongruenssi. Määritellään kategoria $\mathcal{A}_\sim$, jolla on sama pisteiden luokka kuin kategoriassa $\mathcal{A}$ ja jonka nuolet ovat kategorian $\mathcal{A}$ nuolten ekvivalenssiluokkia eli

$$\vec{\mathcal{A}}_\sim(A, B) := \{[f] \mid f \in \vec{\mathcal{A}}(A, B)\} \quad \text{ja} \quad [f] \star [g] = [f \star g].$$

Kategoriaa $\mathcal{A}_\sim$ kutsutaan kategorian $\mathcal{A}$ *tekijäkategoriaksi*.

 [32, s. 10]

Esimerkiksi topologisen avaruuksien kategoriassa voidaan asettaa kaikki homotoppiiset kuvaukset samoiksi, jolloin saadaan tekijäkategoriana homotopiakategoria.

Muistutus 2.42. (*Kuvausten homotopia*) Topologisen avaruuksien $\mathcal{X}$ ja $\mathcal{Y}$ väliset jatkuvat kuvaukset $f, g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ovat *homotooppiset*, jos on olemassa jatkuva kuvaus

$$h: \mathcal{X} \times I \rightarrow \mathcal{Y},$$

jolle $h(x, 0) = f(x)$ ja $h(x, 1) = g(x)$. Homotopiaa merkitään $h: f \simeq g$.  [13, s. 12]

Esimerkki 2.43. Homotopiakategoria **hTop** saadaan topologisen avaruuksien tekijäkategoriana **Top**_~, jossa kongruenssina on kuvausten homotopia. Homotopiakategorian pisteinä ovat topologiset avaruudet ja nuolina jatkuvien kuvausten homotopialuokat.

Homotopiakategoriasta on myös kantapisteellinen versio, jossa homotopian vaaditaan pitävän kantapisteen muuttumattomana.

Muistutus 2.44. (*Suhteellinen homotopia*) Kuvaukset f ja $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ovat homotooppiset joukon $A \subset \mathcal{X}$ suhteen, jos on olemassa homotopia $h: f \simeq g$, jonka rajoittumalle on voimassa $h(x, t)|_A = f(x)|_A = g(x)|_A$ kaikilla $t \in I$. Tätä merkitään $h: f \simeq g \text{ rel } A$.

 [13, s. 13]

Esimerkki 2.45. Kantapisteellinen homotopiakategoria **hTop**_{*} on tekijäkategoria **Top**_{*}_~, jossa kongruenssina on homotopia kantapisteen suhteen.

Monet merkittävät solmuteoriassa vaadittavat käsitteet voidaan ilmaista yksinkertaisesti ylinuolina. Niistä huomionarvoisimmat lienevät homotopia ja homologia.

Määritelmä 2.46. (*Ylinuoli*) Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kategorioita. *Ylinuoli* $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ kuvaa jokaisen lähtökategorian pisteen $X \in \mathcal{A}$ maalikategorian pisteeksi $F(X) \in \mathcal{B}$ ja jokaisen lähtökategorian nuolen $X \xrightarrow{f} Y$ maalikategorian nuoleksi $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$. Lisäksi

ylinuolelta vaaditaan kaksi ehtoa:

1. Nuolten liitos säilyy eli jos lähtökategoriassa on voimassa $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, niin maalikategoriassa on $F(f \star g) = F(f) \star F(g)$.
2. Lähtökategorian identiteettinuoli kuvautuu vastaavaksi maalikategorian identiteettinuoleksi eli $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$.  [14, s. 13]

Perinteisesti perusryhmä eli ensimmäinen homotopiar ryhmä on esitetty ilman kategorioteorian käsitteitä, mutta kun se kirjoitetaan ylinuolena, niin samalla muun muassa indusoidut homomorfismit määrittyvät luonnollisesti

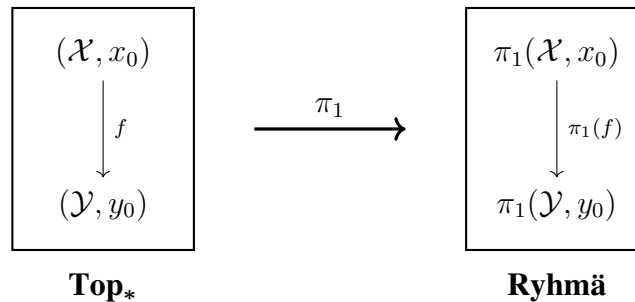
Muistutus 2.47. (Polkuhomotopia) Polut $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathcal{X}$ ovat polkuhomotooppiset, jos on olemassa homotopia h polkujen päätepisteiden 0 ja 1 suhteen eli $h: \alpha \simeq \beta \text{ rel}\{0, 1\}$. Tätä merkitään $h: \alpha \sim \beta$.  [13, s. 13]

Muistutus 2.48. (Perusryhmä) Olkoon $\Omega(\mathcal{X}, x_0)$ silmukkajoukko. Siitä muodostettua tekijäjoukkoa

$$\pi_1(\mathcal{X}, x_0) = \Omega(\mathcal{X}, x_0) / \sim,$$

jossa $\sim$ on polkuhomotopian määräämä ekvivalenssirelaatio, kutsutaan nimellä *perusryhmä* eli *ensimmäinen homotopiar ryhmä*.  [13, s. 17]

Esimerkki 2.49. Perusryhmä muodostaa ylinuolen $\pi_1: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Ryhmä}$ kuvan 1 mukaisesti. Se kuvaa jokaisen kantapisteavaruuden $(\mathcal{X}, x_0)$ sitä vastaavaksi yksikäsitteiseksi ryhmäksi $\pi_1(\mathcal{X}, x_0)$. Useampi eri kantapisteavaruus voi kuitenkin kuvautua samaksi ryhmäksi. Lisäksi jokainen kantapisteavaruuksien välinen jatkuva kuvaus f kuvautuu ryhmien väliseksi indusoiduksi homomorfismiksi $f_* := \pi_1(f)$. Samalla tavalla kuin f kuvaa lähtöavaruuden silmukan α maaliavaruuden silmukaksi $\alpha \star f$, niin f_* kuvaa lähtöryhmän ekvivalenssiluokan $[\alpha]$ maaliryhmän ekvivalenssiluokaksi $[\alpha \star f]$.



Kuva 1: Perusryhmä muodostaa ylinuolen π_1 kategoriasta **Top_{*}** kategoriaan **Ryhmä**.

Määritelmä 2.50. (Luonnollinen muunnos) Olkoot F ja $G: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ kategorioiden $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ välisiä ylinuolia. Luokkaa maalikategorian nuolia $(\alpha_A)_{A \in \mathcal{A}} \in \vec{\mathcal{B}}$ kutsutaan *luonnolliseksi*

muunnoksesi, kun kaavio (2) on vaihdannainen jokaisella nuolella $X \xrightarrow{f} Y \in \mathcal{A}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{X \xrightarrow{f} Y} & \begin{array}{c} \nearrow F \\ \Downarrow \alpha \\ \searrow G \end{array} & \boxed{\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \alpha_X \downarrow & & \downarrow \alpha_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}} \\
 \text{Kategoria } \mathcal{A} & & \text{Kategoria } \mathcal{B}
 \end{array} \quad (2)$$

Luonnollista muunnosta merkitään $\alpha: F \Rightarrow G$.

 [14, s. 16]

2.2.2 Monoidinen kategoria

Monoidisilla kategorioilla ja niiden monoideilla on tärkeä osa Frobeniuksen algebroidien kategoriateoreettisessa muotoilussa, ja muun muassa algebrat ovat modulien kategorian monoideja. Lisäksi vektoriavaruuksien ja $(1 + 1)$ -ulotteisien pienen kategoriat ovat monoidisia tensoritulon ja erillisen yhdisteen suhteen, mikä on perustana niiden väliselle topologiselle kvanttikenttäteorialle.

Monoidisessa kategoriassa on kaksipaikkainen laskutoimitus ja neutraalipiste. Jotta laskutoimitus voitaisiin määritellä, niin kategoriasta on muodostettava tulokategoria itsensä kanssa.

Määritelmä 2.51. (Tulokategoria) Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kategorioita. Tulokategoria $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ koostuu pisteistä (A, B) ja nuolista $(A, B) \xrightarrow{(f, g)} (A', B')$, jossa $A, A' \in \mathcal{A}$ ja $B, B' \in \mathcal{B}$ sekä $A \xrightarrow{f} A' \in \mathcal{A}$ ja $B \xrightarrow{g} B' \in \mathcal{B}$. Liitoksena on $(f, g) \star (f', g') = (f \star f', g \star g')$, jossa $f' \in \mathcal{A}$ ja $g' \in \mathcal{B}$.  [14, s. 19]

Monoidisen kategorian laskutoimituksen $\square: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ on oltava liitännäinen. Kategoriateoreettisesti vaatimus voidaan esittää kaaviona (3). Lisäksi laskutoimituksella on oltava neutraalipiste E , jonka voidaan ajatella säilyvän kummankinpuoleisissa laskutoimituksissa $E \square A = A = A \square E$. Tilanne vastaa kaaviota (4). Teknisistä syistä neutraalipiste esitetään kuitenkin ylinuolena yhden pisteen kategoriasta tarkasteltavaan kategoriaan $\mathcal{A}$.

Merkintä 2.52. Yhden pisteen kategoriaa, jossa on vain identiteettinuoli, merkitään $\mathbf{1}$.

Merkintä 2.53. Olkoon $\mathcal{A}$ kategoria. Merkintä $\mathcal{A}^n$ tarkoittaa n -kertaista tulokategoriaa $\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}$. Lisäksi määritellään, että $\mathcal{A}^0 := \mathbf{1}$.

Määritelmä 2.54. (Tarkka monoidinen kategoria) Olkoon $\mathcal{A}$ kategoria. Olkoot lisäksi $\square: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ja $E: \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{A}$ ylinuolia. Kolmikkoa $(\mathcal{A}, \square, E)$ kutsutaan tarkaksi monoidiseksi kategoriaksi, jos yhtälöriivien (3) ja (4) kaaviot ovat vaihdannaiset. Niissä $\text{id}_{\mathcal{A}}$ tarkoittaa identiteettiylinuolta ja $\text{pr}_{\mathcal{A}}$ projektioylinuolta.  [20, s. 150]

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \\
 \swarrow \square \times \text{id}_{\mathcal{A}} & & \searrow \text{id}_{\mathcal{A}} \times \square \\
 \mathcal{A} \times \mathcal{A} & & \mathcal{A} \times \mathcal{A} \\
 \searrow \square & & \swarrow \square \\
 & \mathcal{A} &
 \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{1} \times \mathcal{A} & \xrightarrow{E \times \text{id}_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \xleftarrow{\text{id}_{\mathcal{A}} \times E} & \mathcal{A} \times \mathbf{1} \\
 \searrow \text{pr}_{\mathcal{A}} & & \downarrow \square & & \swarrow \text{pr}_{\mathcal{A}} \\
 & & \mathcal{A} & &
 \end{array} \quad (4)$$

Huomautus 2.55. Määritelmän ylinuolille on valittu näennäisesti erikoiset nimet. Merkintä $\square$ johtuu siitä, että ylinuolta voidaan ajatella kaksipaikkaisena laskutoimituksena. Siksi jatkossa voidaan käyttää laskutoimitusmerkintöjä. Tarkemmin sanottuna määritellään lyhennysmerkinnät

$$A \square B := \square(A, B) \quad \text{ja} \quad f \square g := \square(f, g),$$

jossa $A, B \in \mathcal{A}$ ovat pisteitä ja $f, g \in \mathcal{A}$ ovat nuolia.

Koska ylinuolen E kuvassa on vain yksi piste, niin sitä voidaan ajatella kategorian $\mathcal{A}$ neutraalipisteenä laskutoimituksen $\square$ suhteen. Siksi ylinuolta ja sen kuvaa voidaan merkitä samoin eli $E := E(\bullet)$, jossa $\bullet \in \mathbf{1}$ on yhden pisteen kategorian ainoa piste.

Suurin osa monoidisista kategorioista eivät kuitenkaan ole tarkkoja. Esimerkiksi vektoriavaruuksien kategoriassa tensoritulo ei ole tarkalleen ottaen vaihdannainen, vaan ainoastaan pätee isomorfismi $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$. Siksi tarkan monoidisen kategorian määritelmää on lievennettävä sallimalla yhtäsuuruuksien korvaaminen luonnollisilla samaistuksilla.

Määritelmä 2.56. (Luonnollinen samaistus) Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kategorioita ja $F, G: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ylinuolia. Jos on olemassa luonnolliset muunnokset $\alpha: F \Rightarrow G$ ja $\alpha^{-1}: G \Rightarrow F$, joille $\alpha + \alpha^{-1} = \text{id}_F$ ja $\alpha^{-1} + \alpha = \text{id}_G$, niin F ja G samaistuvat luonnollisesti. Lisäksi α ja α^{-1} ovat *luonnolliset samaistukset*. [14, s. 31]

Määritelmä 2.57. (Monoidinen kategoria) Olkoon $\mathcal{A}$ kategoria ja olkoot $\square: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ja $E: \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{A}$ ylinuolia. Kuusikkoa $(\mathcal{A}, \square, E, \alpha, \lambda, \rho)$ kutsutaan *monoidiseksi kategoriaksi*, jos α , λ ja ρ ovat yhtälöriivin (5) kaavioiden mukaisia luonnollisia samaistuksia, jotka täyttävät kaavioiden (6) ja (7) yhtenäisyys ehdot kaikilla pisteillä $A, B, C, D \in \mathcal{A}$. Kaavioissa id_X tarkoittaa identiteetti ylinuolen $\text{id}_{\mathcal{A}}$ pistettä $X \in \mathcal{A}$ vastaavaa nuolta. [25, s. 162]

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & (\square \times \text{id}_{\mathcal{A}})^* \square & \\
 \mathcal{A}^3 & \begin{array}{c} \updownarrow \alpha \end{array} & \mathcal{A} \\
 & (\text{id}_{\mathcal{A}} \times \square)^* \square &
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 & (E \times \text{id}_{\mathcal{A}})^* \square & \\
 \mathbf{1} \times \mathcal{A} & \begin{array}{c} \updownarrow \lambda \end{array} & \mathcal{A} \\
 & \text{pr}_{\mathcal{A}} &
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 & (\text{id}_{\mathcal{A}} \times E)^* \square & \\
 \mathcal{A} & \begin{array}{c} \updownarrow \rho \end{array} & \mathcal{A} \times \mathbf{1} \\
 & \text{pr}_{\mathcal{A}} &
 \end{array}
 \end{array} \quad (5)$$

$$\begin{array}{ccc}
& (A \sqcup B) \sqcup (C \sqcup D) & \\
\alpha_{A,B,C \sqcup D} \nearrow & & \searrow \alpha_{A \sqcup B,C,D} \\
A \sqcup (B \sqcup (C \sqcup D)) & & ((A \sqcup B) \sqcup C) \sqcup D \\
\downarrow \text{id}_A \sqcup \alpha_{B,C,D} & & \uparrow \alpha_{A,B,C} \sqcup \text{id}_D \\
A \sqcup ((B \sqcup C) \sqcup D) & \xrightarrow{\alpha_{A,B \sqcup C,D}} & (A \sqcup (B \sqcup C)) \sqcup D
\end{array} \tag{6}$$

$$\begin{array}{ccc}
& A \sqcup B & \\
\text{id}_A \sqcup \lambda_B \nearrow & & \searrow \rho_A \sqcup \text{id}_B \\
A \sqcup (E \sqcup B) & \xrightarrow{\alpha_{A,E,B}} & (A \sqcup E) \sqcup B
\end{array} \tag{7}$$

Käytännössä jokaista monoidista kategoriata voidaan kohdella niin, kuin se olisi tarkka monoidinen kategoria [25, s. 257]. Siksi jatkossa monoidisen kategorian luonnolliset samaistukset jätetään lähtökohtaisesti merkitsemättä. Esimerkiksi vektoriavaruuksien kategoriassa tämä tarkoittaa, että voidaan käyttää merkintöjä

$$U \otimes V \otimes W := (U \otimes V) \otimes W \quad \text{ja} \quad U \otimes V \otimes W := U \otimes (V \otimes W).$$

Yleisemmin minkä tahansa monoidisen kategorian laskutoimituksen sulkeet voidaan jättää merkitsemättä vastaavalla tavalla, vaikka tarkalleen ottaen sulkeelliset muodot eivät olisikaan samat.

Esimerkki 2.58. Joukkojen kategoria (**Joukko**, $\times$, $\{*\}$, α , λ , ρ) on monoidinen kategoria, jonka laskutoimituksena on karteellinen tulo ja jonka neutraalipisteenä on yhden pisteen joukko. Sen luonnollisten samaistuksien nuolina ovat kuvaukset

$$\begin{aligned}
\alpha_{A,B,C}: (A \times B) \times C &\rightarrow A \times (B \times C) \\
((a, b), c) &\mapsto (a, (b, c)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_A: \{*\} \times A &\rightarrow A & \text{ja} & & \rho_A: A \times \{*\} &\rightarrow A \\
(*, a) &\mapsto a, & & & (a, *) &\mapsto a,
\end{aligned}$$

Käytännössä monoidisuus tarkoittaa, että:

- Kaikki tulojoukot $(A \times B) \times C$ ja $A \times (B \times C)$ ovat luonnollista samaistusta $\alpha_{A,B,C}$ vaille samat vastaavalla tavalla kuin kaaviossa (3).
- Kaikkien kuvauksien $A \xrightarrow{f} A'$, $B \xrightarrow{g} B'$ ja $C \xrightarrow{h} C'$ tulokuvaukset $(f \times g) \times h$ ja $f \times (g \times h)$ ovat luonnollisia samaistuksia $\alpha_{A',B',C'}$ ja $\alpha_{A,B,C}$ vaille samat. Nuolikaaviona kirjoitettuna kuvaukset $((f \times g) \times h) * \alpha_{A',B',C'}$ ja $\alpha_{A,B,C} * (f \times (g \times h))$ ovat

$$\begin{aligned}
(A \times B) \times C &\xrightarrow{(f \times g) \times h} (A' \times B') \times C' &\xrightarrow{\alpha_{A',B',C'}} & A' \times (B' \times C') \\
((a, b), c) &\mapsto ((f(a), g(b)), h(c)) &\mapsto & (f(a), (g(b), h(c)))
\end{aligned}$$

ja

$$(A \times B) \times C \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}} A \times (B \times C) \xrightarrow{f \times (g \times h)} A' \times (B' \times C')$$

$$((a, b), c) \mapsto (a, (b, c)) \mapsto (f(a), (g(b), h(c))).$$

Ne ovat samat niin ikään kaaviota (3) mukaillen.

- Joukot $\{*\} \times A$ ja A ovat luonnollista samaistusta λ_A vaille samat ja joukot $A \times \{*\}$ ja A ovat samat luonnollisella samaistuksella ρ_A samantapaisesti kuin kaaviossa (4).
- Olkoon $\{*\} \xrightarrow{\text{id}_{\{*\}}} \{*\}$ yhden pisteen joukon identiteettikuvaus ja olkoon $A \xrightarrow{f} A'$ mielivaltainen kuvaus. Tällöin kuvaukset f ja $(\text{id}_{\{*\}} \times f)$ sekä f ja $(f \times \text{id}_{\{*\}})$ ovat samat luonnollisien samaistuksien λ_A ja $\lambda_{A'}$ sekä ρ_A ja $\rho_{A'}$ jälkeen eli

$$\lambda_A * f = (\text{id}_{\{*\}} \times f) * \lambda_{A'} \quad \text{ja} \quad \rho_A * f = (f \times \text{id}_{\{*\}}) * \rho_{A'}.$$

Vastaava tilanne on esitetty kaaviossa (4).

Tavallisesti luonnollisia samaistuksia ei täsmällisesti esitetä, vaan kategoriaa merkitään vain (**Joukko**, $\times$, $\{*\}$).

Samalla tavalla kuin joukkojen kategoria karteesisella tulolla on monoidinen kategoria, niin mikä tahansa muu kategoria $\mathcal{A}$, jossa on määritelty äärellinen tulo $\otimes$ on monoidinen kategoria $(\mathcal{A}, \otimes, T)$. Tässä T on kategorian loppupiste.

Muistutus 2.59. (*Alku- ja loppupiste*) Olkoon $\mathcal{A}$ kategoria. Piste $T \in \mathcal{A}$ on *loppupiste*, jos jokaiselle pisteelle $A \in \mathcal{A}$ on olemassa täsmälleen yksi nuoli $A \rightarrow T$. Vastaavasti $I \in \mathcal{A}$ on *alkupiste*, jos $I \rightarrow A$ on yksikäsitteinen kaikilla $A \in \mathcal{A}$. [14, s. 9]

Monoidisiin kategorioihin voidaan määritellä monoidipisteitä, joita voidaan kutsua myös monoideiksi tai algebroidiksi. Nimensä mukaan esimerkiksi joukkojen kategorian monoidipisteet ovat tavallisia monoideja ja vektoriavaruuksien kategorian monoidipisteet ovat tavallisia algebroidia.

Määritelmä 2.60. (*Monoidipiste*) Olkoon $(\mathcal{A}, \square, E, \alpha, \lambda, \rho)$ monoidinen kategoria ja $M \in \mathcal{A}$ sen piste. Kolmikko (M, μ, η) on *monoidi*, kun $\mu: M \square M \rightarrow M$ ja $\eta: E \rightarrow M$ ovat nuolia, joille kaaviot (8) ja (9) ovat vaihdannaiset. [25, s. 170]

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \mu \nearrow & & \nwarrow \mu \\ M \square M & & M \square M \\ \uparrow \text{id}_M \square \mu & & \uparrow \mu \square \text{id}_M \\ M \square (M \square M) & \xrightarrow{\alpha_{M,M,M}} & (M \square M) \square M \end{array} \quad (8)$$

$$\begin{array}{ccccc} E \times M & \xrightarrow{\eta \times \text{id}_M} & M \times M & \xleftarrow{\text{id}_M \times \eta} & M \times E \\ & \searrow \lambda_M & \downarrow \mu & \swarrow \rho_M & \\ & & M & & \end{array} \quad (9)$$

Kuten lähes kaikilla kategoriateorian käsitteillä myös monoidipisteellä on vastamääritelmänsä, jota kutsutaan tilanteesta riippuen vastamonoidipisteeksi, vastamonoidiksi tai vasta-algebraksi.

Määritelmä 2.61. (*Vastamonoidipiste*) Olkoon $(\mathcal{A}, \square, E, \alpha, \lambda, \rho)$ monoidinen kategoria ja $M \in \mathcal{A}$ sen piste. Kolmikko (M, δ, ε) on *vastamonoidi*, kun $\delta: M \rightarrow M \square M$ ja $\varepsilon: M \rightarrow E$ ovat nuolia, joille kaaviot (10) ja (11) ovat vaihdannaiset. [20, s. 212]

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 \delta \swarrow & & \searrow \delta \\
 M \square M & & M \square M \\
 \text{id}_M \square \delta \downarrow & & \downarrow \delta \square \text{id}_M \\
 M \square (M \square M) & \xleftarrow{\alpha_{M,M,M}^{-1}} & (M \square M) \square M
 \end{array} \quad (10)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 E \times M & \xleftarrow{\varepsilon \times \text{id}_M} & M \times M & \xrightarrow{\text{id}_M \times \varepsilon} & M \times E \\
 & \nwarrow \lambda_M^{-1} & \uparrow \delta & \nearrow \rho_M^{-1} & \\
 & & M & &
 \end{array} \quad (11)$$

Monoidisille kategorioille on olemassa tärkeä erikoistapaus, jonka laskutoimitus on symmetrinen. Esimerkiksi kaikki monoidiset kategoriat, joiden laskutoimitus on kategoriateoreettinen tulo tai vastatulo, ovat symmetrisiä.

Määritelmä 2.62. (*Symmetrinen monoidinen kategoria*) Olkoon $(\mathcal{A}, \square, E, \alpha, \lambda, \rho)$ monoidinen kategoria. Se on *symmetrinen*, jos sen jokaisille pisteille A ja B on olemassa luonnolliset samaistukset $\tau_{A,B}: A \square B \cong B \square A$, joille $\tau_{A,B} \star \tau_{B,A} = \text{id}_{A \square B}$ ja kaaviot (12) ja (13) ovat vaihdannaiset. [25, s. 184]

$$\begin{array}{ccc}
 E \times A & \xrightarrow{\tau_{E,A}} & A \times E \\
 \lambda_A \searrow & & \swarrow \rho_A \\
 & A &
 \end{array} \quad (12)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 A \square (B \square C) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}} & (A \square B) \square C & \xrightarrow{\tau_{A \square B, C}} & C \square (A \square B) \\
 \text{id}_A \square \tau_{B,C} \downarrow & & & & \downarrow \alpha_{C,A,B} \\
 A \square (C \square B) & \xrightarrow{\alpha_{A,C,B}} & (A \square C) \square B & \xrightarrow{\tau_{A,C} \square \text{id}_B} & (C \square A) \square B
 \end{array} \quad (13)$$

2.3 Ketjukompleksi

Ketjukompleksit ovat monikäyttöisiä työkaluja, jotka tarjoavat pohjan muun muassa yleiselle homologiaalle. Alaluvussa 2.3.1 käsitellään ketjukompleksien perusmääritelmiä sekä muodostetaan niistä kategoria. Jälkimmäinen alaluku 2.3.2 keskittyy ketjukompleksien ominaisuuksiin ja niiden laskutoimituksiin.

2.3.1 Ketjukompleksien kategoria

Ketjukompleksilla tarkoitetaan kumpaankin suuntaan päättymätöntä jonoa vaihdannaisia ryhmiä ja niiden välisiä ryhmähomomorfismeja, joiden määrittelevänä piirteenä on, että kahden homomorfismin liitos on nollahomomorfismi. Ketjukompleksit voitaisiin myös yleistää R -moduleille ja edelleen vaihdannaisille kategorioille, mutta tämän luvun määritelmät esitetään ryhmämuodossa.

Usein ketjukomplekseja käytetään työkaluina, koska ne käyttäytyvät hyvin ja niiden laskutoimitukset ovat suhteellisen suoraviivaisia. Käytännössä voidaan huomata, että jokin muu rakenne voidaan yksinkertaistaa ketjukompleksiksi. Esimerkiksi alaluvussa 2.4.2 määriteltävässä kolmionhomologiassa ryhmät muodostuvat samanulotteisista n -kolmioista ja homomorfismit ovat niiden välisiä kuvauksia. Vastaavasti alaluvun 4.2.5 Hovanovin homologia niputtaa moniulotteisen kuution kärjet ryhmiksi ja särmät homomorfismeiksi.

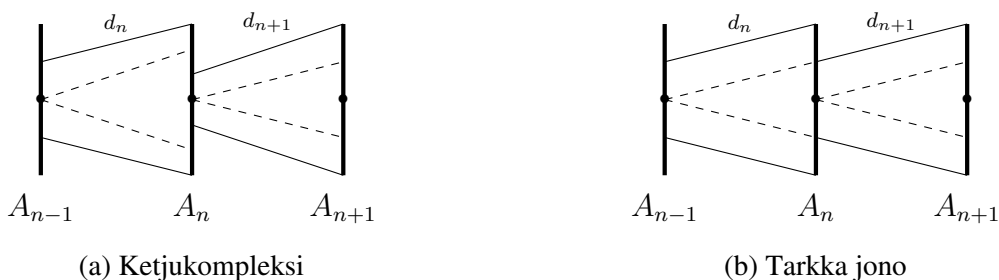
Määritelmä 2.63. (Ketjukompleksi) Olkoon $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ joukko vaihdannaisia ryhmiä ja $(d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ joukko niiden välisiä homomorfismeja, joille pätee $d_n: A_n \rightarrow A_{n-1}$ kaavion (14) mukaisesti.

$$\cdots \xleftarrow{d_{n-1}} A_{n-1} \xleftarrow{d_n} A_n \xleftarrow{d_{n+1}} A_{n+1} \xleftarrow{d_{n+2}} \cdots \quad (14)$$

Jos $d_{n+1} \circ d_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, niin jonoa (14) kutsutaan *ketjukompleksiksi*. Sitä merkitään (A, d) tai vain A . Ketjukompleksin ryhmää A_n sanotaan astetta n olevaksi *termiksi* ja vastaavasti homomorfismia d_n kutsutaan astetta n olevaksi *differentiaaliksi*. [35, s. 10]

Ketjukompleksin erikoistapaus on tarkka jono. Tarkkuudella tarkoitetaan, että jokaisen homomorfismin kuvaryhmä on sama kuin seuraavan homomorfismin ydin. Ketjukompleksia ja tarkkaa jonoa on havainnollistettu kuvassa 2.

Määritelmä 2.64. (Tarkka jono) Ketjukompleksia (A, d) kutsutaan *tarkaksi jonoksi*, kun kaikilla n on voimassa $\text{Ker } d_n = \text{Im } d_{n+1}$. [35, s. 7]



Kuva 2: Ketjukompleksin jokaisen kuvauksen d_{n+1} kuva sisältyy viereisen kuvauksen d_n ytimeen. Tarkassa jonossa ne ovat täsmälleen samat. Kuvassa paksut pystyviivat esittävät ryhmiä, yhtenäiset vinoviivat homomorfismien kuvia ja katkoviivat niiden ytimiä.

Usein ketjukompleksit ovat jommastakummasta tai molemmista päistä rajoitetut. Tätä merkitään lyhyesti laittamalla kaavion viimeiseksi ryhmäksi 0. Koska varsinkin ketjukompleksien kategorioinnissa on tärkeää, että kompleksit ovat aina molemmista päistä rajattomat, niin merkintä 0 on mahdollista tulkita lyhennyksenä äärettömiin jatkuvasta triviaalien ryhmien ja triviaalien kuvausten jonosta $0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$.

Eräs tärkeä erikoistapaus molemmista päistä rajoitetusta ketjukompleksista on lyhyt tarkka jono

$$0 \xleftarrow{0} A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C \xleftarrow{0} 0.$$

Se on tarkka jos ja vain jos f on surjektio, g on injektio ja $\text{Im } g = \text{Ker } f$.

Ketjukomplekseja voidaan yhdistää ketjukuvauksilla. Ne koostuvat joukosta ryhmähomomorfismeja, jotka on määritellyt ketjujen samanasteisien termien välille.

Määritelmä 2.65. (Ketjukuvaus) Ketjukompleksien (A, a) ja (B, b) välinen kuvausperhe $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ on *ketjukuvaus*, kun kaavio (15) on vaihdannainen.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xleftarrow{a_{n-1}} & A_{n-1} & \xleftarrow{a_n} & A_n & \xleftarrow{a_{n+1}} & A_{n+1} \xleftarrow{a_{n+2}} \cdots \\ & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} \\ \cdots & \xleftarrow{b_{n-1}} & B_{n-1} & \xleftarrow{b_n} & B_n & \xleftarrow{b_{n+1}} & B_{n+1} \xleftarrow{b_{n+2}} \cdots \end{array} \quad (15)$$

Ketjukuvausta voidaan merkitä lyhyesti vain $f: A \rightarrow B$.

 [35, s. 10]

Ketjukompleksit muodostavat kategorian, jonka pisteinä ovat ketjukompleksit ja nuolina ketjukuvaukset. Identiteettinuolena on ketjukuvaus $\text{id}: A \rightarrow A$, jonka jokainen homomorfismi on identiteettikuvaus $\text{id}_n: A_n \rightarrow A_n$. Ketjukuvauksien f ja g liitoksena on ketjukuvaus $f \star g$, jonka homomorfismit ovat muotoa $(f \star g)_n = f_n \star g_n$.

Määritelmä 2.66. (Ketjukompleksien kategoria) Kategoriaa, jonka pisteet ovat ketjukomplekseja ja nuolet ketjukuvauksia, kutsutaan *ketjukompleksien kategoriaksi*. Siitä käytetään merkintää **Ketju**.

 [35, s. 10]

2.3.2 Ketjukompleksien ominaisuuksia

Ketjukomplekseilla on monia algebrallisille rakenteille tuttuja ominaisuuksia. Niistä voidaan esimerkiksi muodostaa alikomplekseja, tekijäkomplekseja ja tarkkoja jonoja ja myös vaikkapa isomorfialauseista on versiot ketjukomplekseille.

Ketjukompleksien alikompleksit vastaavat ryhmien aliryhmiä. Eräs tapa ajatella alikompleksia on alkuperäisen kompleksin rajoittaminen niin, että kussakin tekijässä rajoitetaan tiettyyn aliryhmään ja muiden tekijään kuuluvien alkioiden olemassaolo unohdetaan.

Määritelmä 2.67. (Alikompleksi) Ketjukompleksin (A, d) *alikompleksi* (A', d') on sellainen ketjukompleksi, jolle kaavio (16) on vaihdannainen kaikilla kokonaisluvulla n . Kuvaukset $i_n: A'_n \hookrightarrow A_n$ ovat inklusiokuvauksia.

$$\begin{array}{ccc} A'_n & \xleftarrow{d'_{n+1}} & A'_{n+1} \\ \downarrow i_n & & \downarrow i_{n+1} \\ A_n & \xleftarrow{d_{n+1}} & A_{n+1} \end{array} \quad (16)$$

Toisin sanoen termit A'_n ovat alkuperäisen kompleksin termien aliryhmiä $A'_n \leq A_n$ ja differentiaalit d'_n ovat rajoittumia alkuperäisistä differentiaaleista $d'_n = d_n|_{A'_n}$.  [32, s. 89]

Esimerkki 2.68. Olkoon $(A, d): (\cdots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \rightarrow \cdots)$ ketjukompleksi, jolle $A_0, A_1 = \mathbb{Z}$ ja $d_1(n) = 2 \cdot n$. Tällöin $(A', d'): (\cdots \rightarrow 6\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} 3\mathbb{Z} \rightarrow \cdots)$ on alikompleksi, koska $6\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ ja $3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. Lisäksi differentiaalina on rajoittuma $d'_1(n) = 2 \cdot n$. Tilanne on esitetty kaavion (17) vasemmalla puolella ja oikealla puolella on näytetty alkion $-6 \in 6\mathbb{Z}$ kuvautuminen.

$$\begin{array}{ccc} 6\mathbb{Z} & \xrightarrow{d'_1} & 3\mathbb{Z} \\ i_1 \downarrow & & \downarrow i_{1-1} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{d_1} & \mathbb{Z} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} -6 & \xrightarrow{\cdot 2} & -12 \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} \\ -6 & \xrightarrow{\cdot 2} & -12 \end{array} \quad (17)$$

Huomautus 2.69. Kahden ketjun välisen ketjukuvauksen $f: (A, a) \rightarrow (B, b)$ ydin muodostaa kompleksin (A, a) alikompleksin

$$\text{Ker } f: (\cdots \rightarrow \text{Ker } f_n \xrightarrow{a'_n} \text{Ker } f_{n-1} \rightarrow \cdots).$$

Vastaavasti ketjukuvauksen kuva muodostaa kompleksin (B, b) alikompleksin

$$\text{Im } f: (\cdots \rightarrow \text{Im } f_n \xrightarrow{b'_n} \text{Im } f_{n-1} \rightarrow \cdots).$$

Samalla tavalla kuin ryhmät voidaan jakaa aliryhmillään ja niin saada tekijäryhmä, myös ketjukompleksit voidaan jakaa alikompleksilla, jolloin muodostuu tekijäkompleksi.

Määritelmä 2.70. (Tekijäkompleksi) Olkoon (A, d) ketjukompleksi ja (A', d') sen alikompleksi. Niiden avulla saadaan *tekijäkompleksi* $(A, d)/(A', d')$

$$\cdots \xleftarrow{\bar{d}_{n-1}} A_{n-1}/A'_{n-1} \xleftarrow{\bar{d}_n} A_n/A'_n \xleftarrow{\bar{d}_{n+1}} A_{n+1}/A'_{n+1} \xleftarrow{\bar{d}_{n+2}} \cdots,$$

jossa termit A_n/A'_n ovat tekijäryhmiä ja differentiaalit $\bar{d}_n$ ovat ryhmähomomorfismeja, joille $[a_n] = a_n + A'_n \mapsto d_n(a_n) + A'_{n-1} = [d_n(a_n)]$, kun $a_n \in A_n$.  [32, s. 89]

Esimerkki 2.71. Jatketaan esimerkin 2.68 tarkastelua ja muodostetaan tekijäkompleksi kompleksista $A: (\cdots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \rightarrow \cdots)$ ja sen alikompleksista $A': (\cdots \rightarrow 6\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} 3\mathbb{Z} \rightarrow \cdots)$. Tekijäryhmät ovat $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ ja $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2]\}$ ja differentiaali on $\bar{d}_1([n]) = [d_1(n)] = [2 \cdot n]$. Siispä tekijäkompleksi on

$$A/A': (\cdots \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \cdots).$$

Esimerkiksi alkio $[5] \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ kuvautuu alkioksi $\bar{d}_1([5]) = [2 \cdot 5] = [1] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Kolme ketjukompleksia voivat muodostaa lyhyen tarkan jonon. Tällöin jokaista astetta n kohden on muodostuttava lyhyt tarkka jono, joka koostuu kunkin kompleksin n :nnestä termistä sekä niiden välisistä ketjukuvauksien osista.

Määritelmä 2.72. (Ketjukompleksien lyhyt tarkka jono) Olkoot (A, a) , (B, b) ja (C, c) ketjukomplekseja sekä $f: (A, a) \rightarrow (B, b)$ ja $g: (B, b) \rightarrow (C, c)$ niiden välisiä ketjukuvauksia. Jono $0 \rightarrow (A, a) \xrightarrow{f} (B, b) \xrightarrow{g} (C, c) \rightarrow 0$ on *lyhyt tarkka jono*, kun sitä vastaava kaavio (18)

on vaihdannainen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \xrightarrow{a_{n+2}} & A_{n+1} & \xrightarrow{a_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{a_n} & A_{n-1} \xrightarrow{a_{n-1}} \cdots \\
 & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\
 \cdots & \xrightarrow{b_{n+2}} & B_{n+1} & \xrightarrow{b_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{b_n} & B_{n-1} \xrightarrow{b_{n-1}} \cdots \\
 & & \downarrow g_{n+1} & & \downarrow g_n & & \downarrow g_{n-1} \\
 \cdots & \xrightarrow{c_{n+2}} & C_{n+1} & \xrightarrow{c_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{c_n} & C_{n-1} \xrightarrow{c_{n-1}} \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array} \tag{18}$$

 [32, s. 89]

2.4 Homologia

Erilaiset homologioiden muodostavat pohjan sekä Alexanderin polynomille että Hovanovin homologialle. Luvussa lähdetään liikkeelle teoreettisimmista käsitteistä ja ne vähitellen tarkennetaan laskennallisesti yksinkertaisimpiin homologioiden muotoihin, jotka ovat myös käytännössä hyödyllisimmät.

Alaluvussa 2.4.1 käsitellään homologioiden yleistä määritelmää. Käytännössä kaikki muut homologioiden muuntavan jonkin tarkasteltavan matemaattisen olion ketjukompleksiksi, jolle voidaan laskea yleinen homologia.

Muissa alaluvuissa käsitellään kolmihomologiaa, joka on yleisimmässä käytössä oleva homologioiden muoto. Kolmihomologia voidaan muodostaa kolmella eri tavalla. Alaluku 2.4.2 käsittelee kolmihomologioiden yleistä muotoa, joka soveltuu kaikille topologisille avaruuksille, mutta jonka laskeminen on käytännössä hyvin hankalaa.

Alaluvussa 2.4.3 esitellään yksinkertainen kolmihomologia, joka on käytännöllinen tapa laskea kolmihomologia useille tavanomaisille avaruuksille – tarkemmin sanottuna kaikille sellaisille avaruuksille, jotka voidaan kolmioida.

Viimeisessä alaluvussa 2.4.4 käydään läpi soluhomologiaa, joka soveltuu sellaisille avaruuksille, jotka voidaan rakentaa käyttäen soluja eli kuulien kanssa homeomorfisia aliavaruuksia.

2.4.1 Yleinen homologia

Yleisessä tapauksessa homologia kuvaa ketjukompleksin rakennetta vaihdannaisien ryhmien avulla. Käytännössä homologia voidaan määritellä kullekin ketjukompleksin tekijälle ja se kuvaa, millaisen osan tekijään tuleva kuvaus kattaa tekijästä lähtevän kuvauksen ytimestä. Toisin sanoen homologia mittaa, kuinka paljon ketjukompleksi poikkeaa tarkasta jonosta.

Homologia voidaan myös tulkita ylinuolena, jolloin se koostuu edellä mainituista

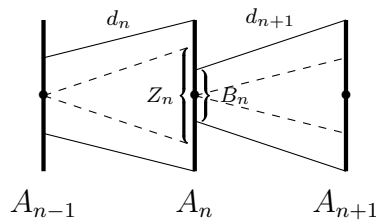
ketjukompleksien homologiaryhmistä ja niiden välisistä homomorfismeista, jotka saadaan ketjukuvauksista.

Merkintä 2.73. Olkoon (A, d) ketjukompleksi. Tällöin $Z_n := \text{Ker } d_n$ ja $B_n := \text{Im } d_{n+1}$.

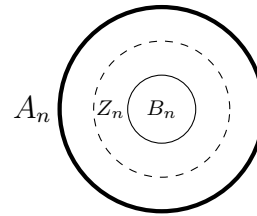
Lyhenteet tarkoittavat syklejä (saks. *Zyklus*) ja reunoja (saks. *Begrenzung*). Niiden intuitiivinen merkitys käy ilmi kolmiohomologioiden yhteydessä alaluvuissa 2.4.2 ja 2.4.3.

Määritelmä 2.74. (Homologiaryhmä) Olkoon (A, d) ketjukompleksi. Sen n :s homologiaryhmä on $H_n(A) = Z_n/B_n$. [35, s. 11]

Kuvassa 3 on havainnollistettu, miltä syklien ja reunojen ryhmät sekä niistä muodostettu homologiaryhmä voivat näyttää.



(a) Ketjukompleksin osa



(b) Ketjukompleksin ryhmä A_n

Kuva 3: Ketjukompleksin n :s homologiaryhmä H_n muodostuu kuvauksen d_n ytimeistä Z_n jaettuna kuvauksen d_{n+1} kuvalla B_n . Vasemmanpuoleisessa kuvassa on ketjukompleksin osa ja oikeanpuoleisessa kuvassa on rajoitettu vain yhteen ketjukompleksin termiin A_n . Kummassakin tapauksessa kuvaukset on merkitty yhtenäisellä viivalla ja niiden ytimet on merkitty katkoviivalla. Paksut viivat kuvaavat ryhmiä.

Ketjukuvaus f voidaan muuntaa homologiaryhmien väliseksi homomorfismiksi. Kun syklin $z_n \in Z_n$ ekvivalenssiluokka on $[z_n] = z_n + B_n$, niin se kuvautuu luokaksi $[f_n(z_n)]$. Tällöin saadaan ylinuoli ketjukompleksien kategoriasta vaihdannaisien ryhmien kategoriin.

Määritelmä 2.75. (Homologia) Määritellään ylinuoli $H_n: \mathbf{Ketju} \rightarrow \mathbf{Ab}$ niin, että

1. Kompleksi A kuvautuu sen n :nneksi homologiaryhmäksi $H_n(A)$ ja
2. Ketjukuvaus $f: A \rightarrow B$ kuvautuu homomorfismiksi $H_n(f): H_n(A) \rightarrow H_n(B)$, jolle $[z_n] \mapsto [f_n(z_n)]$.

Ylinuoli H_n on n :s homologia.

[35, s. 12]

Homologia voidaan yleistää moduleille ja edelleen vaihdannaisille kategorioille. Modulikertoimen homologia on keskeisessä osassa, kun Alexanderin polynomi määritellään.

Määritelmä 2.76. (Modulikertoimen homologia) Kun ketjukompleksin vaihdannaiset ryhmät korvataan R -moduleilla M_i ja sen ryhmähomomorfismit korvataan R -lineaari-kuvauksilla $d_i: M_i \rightarrow M_{i-1}$, niin saadaan modulien ketjukompleksi (M, d) . Ne muodostavat kategorian $\mathbf{Ketju}(R)$, jonka homologiaryhmät ovat muotoa $H_n(M) = Z_n/B_n$, jossa

tekijämodulin jäsenet Z_n ja B_n ovat lineaarikuvauksien ytimiä ja kuvia.  [37, s. 2]

2.4.2 Yleinen kolmiorhomologia

Yleinen homologia voidaan muodostaa usealla eri tavalla. Yksi yleisimmin käytetyistä homologian alalajeista on kolmiorhomologia, joka voidaan laskea usealla yhtäpitävällä tavalla riippuen avaruudesta. Kaikille avaruuksille toimiva määrittelytapa on niin kutsuttu yleinen kolmiorhomologia, mutta käytännössä sen laskeminen on hyvin työlästä

Kolmiorhomologiat perustuvat suhteellisen yksinkertaiselle lähtökohdalle. Ne mittaavat, millä tavalla tarkasteltava avaruus eroaa tavallisesta, reiättömästä avaruudesta. Esimerkiksi yksiulotteisessa tapauksessa tavallinen avaruus vastaa yhtenäistä janaa ja yksi sen ominaisuuksista on, että sen mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää polulla. Sen sijaan kahdesta erillisestä janasta koostuvassa avaruudessa tämä ei toteudu. Polkujen tarkastelu vastaa nollannetta kolmiorhomologiaryhmää. Korkeammat kolmiorhomologiaryhmät pohjautuvat samalle idealle, mutta yksiulotteiset polut korvataan useampiulotteisilla kolmioilla.

Esimerkki 2.77 (Nollannen kolmiorhomologiaryhmän idea). Olkoon $\mathcal{X} = [0, 1] \cup [2, 3]$ kahdesta janasta koostuva avaruus. Olkoon $S_0(\mathcal{X})$ vapaa vaihdannainen ryhmä, jonka kantana ovat kaikki avaruuden $\mathcal{X}$ pisteet ja olkoon $S_1(\mathcal{X})$ vapaa vaihdannainen ryhmä, jonka kantana ovat kaikki avaruuden $\mathcal{X}$ polut. Niiden välille voidaan määritellä ryhmähomomorfismi $\partial_1: S_1(\mathcal{X}) \rightarrow S_0(\mathcal{X})$, joka yksinkertaisesti kuvaa polun sen päätepisteiden erotukseksi. Olkoon esimerkiksi α polku, joka alkaa pisteestä $\alpha(0)$ ja päättyy pisteeseen $\alpha(1)$. Tällöin $\partial_1(\alpha) = \alpha(1) - \alpha(0)$. Tilanne on esitetty kuvassa 4.



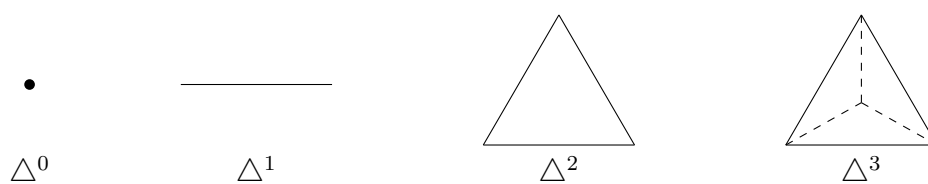
Kuva 4: Avaruus $\mathcal{X} = [0, 1] \cup [2, 3]$ sekä sen erään polun α päätepisteet.

Huomionarvoista on, että $\text{Im } \partial_1$ ei sisällä muotoa $x - y$ olevia pisteitä, jos x ja y kuuluvat avaruuden $\mathcal{X}$ eri janoihin. Tämä tulos poikkeaa tavallisesta, yhdestä janasta koostuvasta avaruudesta, jossa kaikki yhdistelmät ovat mahdollisia. Siispä nyrkkisääntönä on, mitä reikäisempi avaruus, sitä pienemmän osan $\text{Im } \partial_1$ kattaa ryhmästä S_0 .

Esimerkin tarkastelua voidaan laajentaa useampaan ulottuvuuteen ja kaikkiin topologiisiin avaruuksiin. Samalla tavalla kuin polut ovat janan kuvia ja jana on yksinkertainen yksiulotteinen avaruus, niin luonnollisena yleistyksenä on tutkia kolmioiden kuvia, jotka ovat tässä mielessä yksinkertaisimpia kaksiulotteisia avaruuksia. Yleisessä tapauksessa tutkitaan avaruuden n -ulotteisia kolmioita. Nimensä mukaisesti moniulotteinen kolmio tarkoittaa kolmion yleistystä moneen ulottuvuuteen, jolloin esimerkiksi 0-ulotteinen kolmio vastaa pistettä, 1-ulotteinen suoraa, 2-ulotteinen tavallista kolmiota ja 3-ulotteinen nelitahokasta kuvan 5 mukaisesti.

Määritelmä 2.78. (*n -kolmio*) Jos avaruuden $\mathbb{R}^m$ pisteiden $p_0, \dots, p_n$ konveksipeite muodostaa n -ulotteisen alueen, niin sitä kutsutaan *n -kolmioksi* ja siitä käytetään merkintää $\triangle^n = [p_0, \dots, p_n]$.  [11, s. 103]

Usein n -ulotteista kolmiota kutsutaan n -simpleksiksi (lat. *simplex*) ja vastaavasti n -ulotteista monikulmiota voidaan kutsua myös n -polytoopiksi (m.kreik. $\text{πολύς} + \text{τόπος}$).



Kuva 5: Moniulotteiset kolmiot nollannesta ulottuvuudesta kolmanteen ulottuvuuteen.

Yksi syy, miksi tutkitaan nimenomaan moniulotteisten kolmioiden kuvia on, että niiden sivut ovat myöskin moniulotteisia kolmioita, joiden ulottuvuus on yhtä pienempi kuin alkuperäisen kolmion. Tämä helpottaa laskutoimituksia ja mahdollistaa suuntien määrittelyn, mikä osoittautuu tärkeäksi.

Määritelmä 2.79. (*Sivu*) Olkoon $\triangle^n = [p_0, \dots, p_n]$ moniulotteinen kolmio. Jos sen piste p_i poistetaan, niin muiden pisteiden muodostamaa $(n - 1)$ -kolmiota $[p_0, \dots, \cancel{p_i}, \dots, p_n]$ kutsutaan *sivuksi*.  [11, s. 103]

Kolmion suunnaksi kutsutaan sen kärkipisteiden järjestystä. Käytännössä suunta ilmoitetaan yleensä etumerkillä samalla tavalla kuin permutaatioiden etumerkit on määriteltä. Toisin sanoen positiivinen suunta poikkeaa verrokkisuunnasta parillisella määrällä vierekkäisten kärkipisteiden vaihtoja, ja vastaavasti negatiivinen suunta on parittoman vaihtomäärän päässä verrokkijärjestyksestä.

Nimitys 2.80. (*Suuntaus*) Moniulotteisen kolmion $\triangle^n$ *suuntaus* on sen kärkipisteille määrätty järjestys.  [32, s. 62]

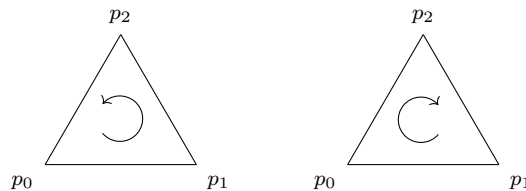
Esimerkki 2.81. Tavallinen kolmio $\triangle^2 = [p_0, p_1, p_2]$ voidaan suunnata kahdella eri tavalla, jotka vastaavat permutaation merkkejä. Positiivinen suunta saadaan yhtäpitävillä valinnoilla

$$p_0 < p_1 < p_2, \quad p_1 < p_2 < p_0 \quad \text{ja} \quad p_2 < p_0 < p_1.$$

Vastaavasti negatiivinen suunta saadaan valinnoilla

$$p_0 < p_2 < p_1, \quad p_2 < p_1 < p_0 \quad \text{ja} \quad p_1 < p_0 < p_2.$$

Suunnat näkyvät kuvassa 6.



Kuva 6: Kolmio $\triangle^2$ voidaan suunnata kahdella tavalla. Vasemmalla on positiivinen permutaatio ja oikealla negatiivinen.

Jatkossa suuntauksien oletetaan noudattavan pisteiden luonnollista järjestystä eli kirjoitusjärjestystä vasemmalta oikealle. Siispä esimerkin 2.81 kolmion $[p_0, p_1, p_2]$ suuntaus on oletuksena $p_0 < p_1 < p_2$ ja vastaavasti vaikkapa 4-kolmion $\triangle^4 = [d, c, b, a]$ suuntaus on oletuksena $d < c < b < a$.

Vaikka kolmion suuntaus on yksinään tarkasteltuna mielivaltainen, niin suuntaamisella on tärkeä osa tarkasteltaessa kolmion reunaa, jolla tarkoitetaan tavalliseen tapaan kaikkien sen sivujen yhdistettä. Alaluvun alun esimerkki 2.77 ei olisi toiminut ilman suuntaamista, jonka johdosta polun alku- ja loppupisteillä oli eri etumerkit. Jos nimittäin molemmat etumerkit olisivat olleet samat, niin kahden janan avaruus ei olisi eronnut tavallisesta yhden janan avaruudesta kuvaryhmän $\text{Im } \partial_1$ suhteen.

Yleisessä tapauksessa kolmion reuna voidaan suunnata menetelmää 2.83 hyödyntäen.

Nimitys 2.82. (Reuna) Jos $\triangle^n = [p_0, \dots, p_n]$ on n -kolmio, niin sen *reuna* on yhdiste kaikista sen sivuista eli

$$[p_0, p_1, \dots, p_n] \cup [p_0, p_1, p_2, \dots, p_n] \cup \dots \cup [p_0, \dots, p_{n-1}, p_n].$$

Tässä merkintä p_i tarkoittaa kärjen i poistamista. Kärki on jätetty ylivivattuna listaukseen, jotta olisi selvää, mistä kolmiosta reuna on otettu. Sillä taasen tulee olemaan vaikutusta suuntaamiseen.  [11, s. 103]

Menetelmä 2.83. (n -kolmion reunan suuntaaminen) Olkoon $\triangle^n = [p_0, \dots, p_n]$ moniulotteinen kolmio. Kun $[p_0, \dots, p_i, \dots, p_n]$ on se n -kolmion sivu, joka on saatu poistamalla kärkipiste p_i , niin sivun *indusoitu suunta* on positiivinen, jos indeksi i on parillinen ja negatiivinen, jos i on pariton. Tällöin saadaan *suunnattu reuna*

$$[p_0, p_1, \dots, p_n] \cup -[p_0, p_1, p_2, \dots, p_n] \cup \dots \cup (-1)^n [p_0, \dots, p_{n-1}, p_n],$$

jonka etumerkit vastaavat sivujen indusoiduja suuntia. Kun suunta on huomioitu etumerkillä, niin poistettuja kärkipisteitä ei ole enää välttämätöntä merkitä.  [11, s. 105]

Esimerkki 2.84. Kolmion $\triangle^2 = [p_0, p_1, p_2]$, suunnattu reuna on $[p_1, p_2] \cup -[p_0, p_2] \cup [p_0, p_1]$. Tämä voidaan nähdä suoraan kuvan 6 vasemmasta kolmiosta, koska sivut $[p_0, p_1]$ ja $[p_1, p_2]$ kulkevat yhtenevästi kolmion suuntauksen suhteen, mutta sivu $[p_0, p_2]$ kulkee siihen nähden vastakkain. Suuntauksen kanssa yhtenevä sivu olisi $[p_2, p_0]$.

Jotta moniulotteisten kolmioiden tarkastelu voisi antaa tietoa topologisesta avaruudesta, niin on määrättävä jonkinlainen kuvaus n -kolmiolta kyseiseen avaruuteen. Yleisessä kolmionhomologiassa näiden kuvauksien tulee olla vain jatkuvia, mikä mahdollistaa kaikkien topologisten avaruuksien homologiaryhmien määrittämisen. Alaluvussa 2.4.3 käsiteltävässä yksinkertaisessa kolmionhomologiassa kuvausten vaaditaan olevan homeomorfisia, joka helpottaa homologiaryhmien laskemista käytännössä, mutta joka rajaa tarkasteltavien topologisten avaruuksien määrää.

Määritelmä 2.85. (n -kolmion kuva) Olkoon $\mathcal{X}$ topologinen avaruus ja olkoon $\triangle^n$ moniulotteinen kolmio. Sen *kuva* on $\sigma: \triangle^n \rightarrow \mathcal{X}$.  [32, s. 64]

Moniulotteisen kolmion kuvasta voidaan käyttää myös nimitystä singulaarinen n -simpleksi (lat. *singularis* + *simplex*), mutta hieman epätarkasti kuvasta käytetään joskus samaa nimeä kuin lähtöavaruutena olevasta n -kolmiosta.

Samalla tavalla kuin esimerkissä 2.77 ryhmän $S_0(\mathcal{X})$ kantana olivat avaruuden pisteet ja ryhmän $S_1(\mathcal{X})$ kantana olivat avaruuden polut, niin yleisessä tapauksessa voidaan määrittellä kaikille luonnollisille luvuille n ryhmä $S_n(\mathcal{X})$, jonka kantana ovat n -kolmioiden kuvat.

Määritelmä 2.86. (n -ketju) Olkoon $\mathcal{X}$ topologinen avaruus ja olkoon $n \geq 0$ kokonaisluku. Tällöin n -ketju $S_n(\mathcal{X})$ on vapaa vaihdannainen ryhmä, jonka kantana ovat kaikki n -kolmioiden kuvat. Kun $n < 0$, niin määritellään, että $S_n(\mathcal{X}) = 0$.  [32, s. 64]

Ketjuryhmät muodostavat ketjukompleksin termit. Seuraavaksi määritellään ryhmien väliset differentiaalit. Niiden on tarkoitus kuvata kolmiot reunoiksi. Koska differentiaali d_i

lähtee ryhmästä $S_n(\mathcal{X})$ ja se kuvautuu ryhmään $S_{n-1}(\mathcal{X})$, niin on määriteltävä muodollinen tapa kirjoittaa reunat $(n-1)$ -ulotteisina. Toistaiseksihan ne on määritelty osina alkuperäisiä n -kolmioita. Tätä varten määritellään sivukuvaukset, jotka kuvaavat $(n-1)$ -ulotteisen kolmion yhtä ulottuvuutta suuremman kolmion reunoiksi.

Nimitys 2.87. (Sivukuvaus) Olkoon $\Delta^n = [p_0, \dots, p_n]$ moniulotteinen kolmio. Sen i :nnen sivun $[p_0, \dots, p_i, \dots, p_n]$ *sivukuvaus* on

$$\begin{aligned} \varepsilon_i: \Delta^{n-1} &\rightarrow \Delta^n \\ [p_0, \dots, p_{n-1}] &\mapsto [p_0, \dots, p_{i-1}, 0, p_i, \dots, p_{n-1}]. \end{aligned}$$

Ääritapausten $i = 0$ ja $i = n$ kuvat ovat $[0, p_0, \dots, p_{n-1}]$ ja $[p_0, \dots, p_{n-1}, 0]$ vastaavasti.

Sivukuvauksen merkintää voidaan täsmentää ulottuvuuden kertovalla yläindeksillä, jolloin siitä tulee ε_i^n .  [32, s. 64]

Moniulotteisen kolmion suunnatun reunan kuva voidaan muodostaa yhdisteenä sivukuvauksesta ja alkuperäisen kolmion kuvasta.

Määritelmä 2.88. (Reunakuvaus) Olkoon $\mathcal{X}$ topologinen avaruus. Sen *reunakuvaus* lähtöryhmän $S_n(\mathcal{X})$ virittäjille $\sigma: \Delta^n \rightarrow \mathcal{X}$ on

$$\begin{aligned} \partial_n: S_n(\mathcal{X}) &\rightarrow S_{n-1}(\mathcal{X}) \\ \sigma &\mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i (\varepsilon_i \star \sigma). \end{aligned}$$

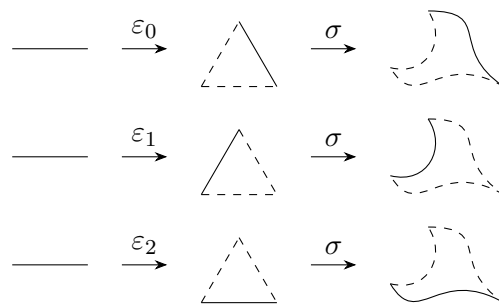
Yleisen alkion kuva on virittäjien kuvien lineaariyhdiste. Lisäksi, kun $n \leq 0$, niin määritellään $\partial_n \sigma = 0$.  [32, s. 64]

Esimerkki 2.89. Tarkastellaan erästä kaksiulotteisen kolmion kuvaa $\sigma: \Delta^2 \rightarrow \mathcal{X}$, jota on havainnollistettu kuvassa 7. Kolmiossa on kolme sivua, jotka vastaavat yksiulotteisia janoja. Niitä vastaavat sivukuvaukset ovat $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ ja ε_2 , jotka kuvaavat janat Δ^1 kolmion Δ^2 kolmeksi eri sivuksi kuvan 7 vasemman puolen mukaisesti. Kun ne ydistetään kolmion kuvaan, saadaan kuvaukset $\varepsilon_i \star \sigma$, jotka muuntavat janat maaliavaruuden poluiksi, joita voidaan tulkita 1-ketjujen ryhmän $S_1(\mathcal{X})$ virittäjinä. Tällöin reunakuvauksena on muodollinen summa $\varepsilon_0 \star \sigma - \varepsilon_1 \star \sigma + \varepsilon_2 \star \sigma$, joka kuvaa 2-ketjujen ryhmän $S_2(\mathcal{X})$ virittäjänä toimivan kolmion kuvan σ erääksi 1-ketjujen ryhmän alkioksi.

Nyt jokaiselle topologiselle avaruudelle $\mathcal{X}$ on määritelty n -ketjujen ryhmät ja niiden väliset reunakuvaukset. Osoittautuu lisäksi, että reunakuvauksien yhdiste on nollakuvaus.

Lause 2.90. Olkoon $\mathcal{X}$ topologinen avaruus ja olkoot ∂_{n+1} ja ∂_n sen reunakuvaukset. Tällöin yhdiste $S_{n+1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(\mathcal{X}) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(\mathcal{X})$ on nollakuvaus.  [32, s. 65]

Todistuksen idea. Kun reunakuvaus otetaan kahdesti, jokaisen sivun sivu tulee lasketuksi kahdesti eri etumerkillä. Esimerkiksi tavallisen kolmion sivujen sivut ovat kärkipisteitä, jolloin kuvan 7 tilanteessa vaikkapa vasen kärkipiste kuuluu sekä vasemmanpuoleiseen sivuun että alapuoliseen sivuun. Siksi se tulee kuvatuksi negatiivisella kertoimella keskiviltä ja positiivisella kertoimella alariviltä. $\square$



Kuva 7: Kolmion kuvan $\sigma: \triangle^2 \rightarrow \mathcal{X}$ reunakuvaus on muodollinen summa sen sivujen kuvista niin, että ylin ja alin rivi ovat positiiviskertoimiset ja keskimmäinen rivi on negatiiviskertoiminen.

Koska kaikki ketjukompleksin vaatimukset täyttyvät, niin tämän alaluvun käsitteet voidaan yhdistää, jolloin muodostuu täysi kolmiokompleksi.

Määritelmä 2.91. (*Täysi kolmiokompleksi*) Olkoon $\mathcal{X}$ topologinen avaruus. Siitä saadaan *täysi kolmiokompleksi*

$$S_*(\mathcal{X}): \quad (\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} S_{n+1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(\mathcal{X}) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots).$$

Sen tekijät $S_n(\mathcal{X})$ ovat n -ketjujen ryhmiä ja differentiaalit ∂_n ovat niiden välisiä reunakuvaus. Kompleksista voidaan käyttää myös pidempää merkintää $(S_*(\mathcal{X}), \partial)$, kun halutaan korostaa reunakuvauksia.  [32, s. 65]

Kaikkia yleisen homologian käsitteitä voidaan soveltaa täyden kolmiokompleksin erikoistapaukseen. Tällöin syklien ja reunojen aliryhmät saavat luontaisen merkityksen. Käytännössä n -sykli tarkoittaa sellaisia yhdisteitä $(n-1)$ -ulotteisien kolmioiden kuvia, jotka saattaisivat muodostaa reunan. Sitä vastoin n -reuna kuvaa n -ulotteisen kolmioiden todellisia reunojen kuvia.

Merkintä 2.92. (*n -sykli*) Topologisen avaruuden $\mathcal{X}$ reunakuvauksen ydintä $\text{Ker } \partial_n(\mathcal{X})$ kutsutaan *n -sykliä ryhmäksi* ja sitä merkitään $Z_n(\mathcal{X})$.  [32, s. 65]

Merkintä 2.93. (*n -reuna*) Topologisen avaruuden $\mathcal{X}$ reunakuvauksen kuvaa $\text{Im } \partial_{n+1}(\mathcal{X})$ kutsutaan *n -reunojen ryhmäksi* ja sitä merkitään $B_n(\mathcal{X})$.  [32, s. 65]

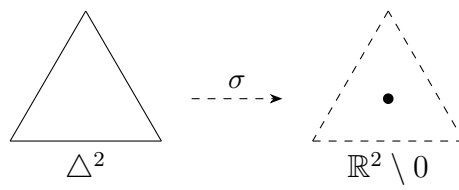
Esimerkki 2.94. Kahden janan avaruudessa, jota käsiteltiin esimerkissä 2.77, reunakuvaus ∂_1 kuvaa polun sen päätepisteiden erotukseksi ja ∂_0 on nollakuvaus. Siispä 0-syklien ryhmä on $Z_0(\mathcal{X}) = \text{Ker } \partial_0$. Se koostuu kaikista mahdollisista pisteiden lineaariyhdisteistä. Käytännössä se siis tarkoittaa, että voisi olla mahdollista muodostaa polku minkä tahansa kahden pisteen välille. Näinhän on tavallisessa, yhden janan avaruudessa. Vastaavasti 0-reunojen ryhmä $B_0(\mathcal{X}) = \text{Im } \partial_1$ koostuu niistä pisteiden lineaariyhdisteistä, joiden välille oikeasti voidaan muodostaa polku tässä avaruudessa.

Esimerkki 2.95. Kuvassa 8 näkyy tilanne, jossa 1-reunojen ryhmä on 1-syklien ryhmän aito aliryhmä. Käytännössä avaruuteen $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ katkoviivoin piirretty kolmionmuotoinen kuvio näyttää pelkkiä reunoja tarkastelemalla muodostavan kolmion kuvan, mutta todellisuudessa sellaista kolmion kuvaa ei ole olemassa, koska origon poistamisesta johtuva epäjatkuvuuskohta estää sen.

Yleinen n :s kolmionhomologiaryhmä on n -sykliä ryhmä jaettuna n -reunojen ryhmällä samalla tavalla kuin yleisen homologian tapauksessa.

Määritelmä 2.96. (*Yleinen kolmionhomologiaryhmä*) Topologisen avaruuden $\mathcal{X}$ *yleinen kolmionhomologiaryhmä* on $H_n(\mathcal{X}) = Z_n(\mathcal{X})/B_n(\mathcal{X})$.  [32, s. 66]

Jotta yleisestä kolmionhomologiasta saataisiin kateogiateoreettinen versio, niin on määriteltävä, miten topologisten avaruuksien väliset jatkuvat kuvaukset saadaan muutettua ketjukuvauksiksi. Toisin sanoen kuvaus $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ tulisi muuttaa ketjukuvaukseksi $f_\#: S_*(\mathcal{X}) \rightarrow S_*(\mathcal{Y})$.



Kuva 8: Kuvan oikealle puolelle piirrettyssä avaruudessa $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ katkoviivat muodostavat 1-syklin. Toisin sanoen reunakuvaus ∂_0 kuvaa niiden yhdisteen nollaksi, koska kukin kärkipiste kuuluu kahteen janaan, jotka kuvaavat ne erimerkkisiksi. Katkoviivan muodostama kuvio ei kuitenkaan kuulu 1-reunoihin, koska ei ole olemassa mitään kolmion Δ^2 kuvaa σ , jonka reuna olisi katkoviivan muotoinen.

Määritelmä 2.97. (*Indusoitu ketjukuvaus*) Olkoon $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ topologistien avaruuksien välinen jatkuva kuvaus. Tällöin voidaan muodostaa kuvaus

$$f_{\#}: S_*(\mathcal{X}) \rightarrow S_*(\mathcal{Y}).$$

Sen osat ovat

$$f_{\#}^n: S_n(\mathcal{X}) \rightarrow S_n(\mathcal{Y})$$

$$\sum k_{\sigma} \sigma \mapsto \sum k_{\sigma} (\sigma \star f).$$

Koko tilanne näkyy kaaviossa (19).

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & S_{n+1}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & S_n(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \\ & & \downarrow f_{\#}^{n+1} & & \downarrow f_{\#}^n & & \downarrow f_{\#}^{n-1} \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & S_{n+1}(\mathcal{Y}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & S_n(\mathcal{Y}) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(\mathcal{Y}) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \end{array} \quad (19)$$

Kuvausta $f_{\#}$ kutsutaan *indusoiduksi ketjukuvaukseksi*.

 [32, s. 66]

Huomautus 2.98. Kuvaus $f_{\#}$ perustuu yksinkertaisesti yhdisteelle $\triangle^n \xrightarrow{\sigma} \mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$.

Kun topologisiin avaruuksiin liitetään täysi kolmiokompleksi ja avaruuksien välisiin jatkuviin kuvauksiin yhdistetään täysien kolmiokompleksien välinen indusoitu ketjukuvaus, niin saadaan ylinuoli topologistien avaruuksien kategoriasta ketjukuvauksien kategoriaan.

Määritelmä 2.99. (*Ylinuoli S_**) Olkoon $S_*: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ketju}$ ylinuoli, joka kuvaa topologisen avaruuden $\mathcal{X}$ täydeksi kolmiokompleksiksi $S_*(\mathcal{X})$ ja kuvauksen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ketjukuvaukseksi $f_{\#}: S_*(\mathcal{X}) \rightarrow S_*(\mathcal{Y})$.

 [32, s. 66]

Ylinuoli S_* on hyvin määritelty, koska identiteettikuvaus $\text{id}_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ kuvautuu identtiseksi ketjukuvaukseksi ja kuvausten yhdiste säilyy ketjukuvauksissa.

Täysien kolmiokompleksien ylinuolta S_* voidaan jatkaa yleisellä homologian ylinuolilla H_n , jolloin saadaan yleisen kolmihomologian kategoriaoteoreettinen määritelmä.

Määritelmä 2.100. (*Yleinen kolmihomologia*) Olkoon $H_n: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$ liitos ylinuolista $S_*: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ketju}$ ja $H_n: \mathbf{Ketju} \rightarrow \mathbf{Ab}$. Sitä kutsutaan *yleiseksi kolmihomologiaksi* ja siitä käytetään samaa merkintää kuin yleisestä homologiasta.

 [32, s. 66]

Esimerkki 2.101. Yhden pisteen avaruuden $\mathcal{X}$ kaikki yleiset kolmihomologiaryhmät ovat $H_n(\mathcal{X}) = 0$, kun $n > 0$. Tämä johtuu siitä, että on olemassa täsmälleen yksi mahdollinen kolmion kuva σ_n kaikille ulottuvuuksille n eli se, joka kuvaa n -kolmion kaikki pisteet avaruuden $\mathcal{X}$ ainoaksi pisteeksi. Siispä n -ketjujen ryhmät ovat yhden alkion virittämiä eli $S_n(\mathcal{X}) = \langle \sigma_n \rangle$.

Reunakuvaus ∂_n on

$$\sigma_n \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i (\varepsilon_i \star \sigma_n).$$

Yhdiste $\varepsilon_i \star \sigma_n$ on sama kuin σ_{n-1} kaikilla muuttujan i arvoilla, koska se kuvaa jokaisen $(n-1)$ -kolmion pisteen avaruuden $\mathcal{X}$ ainoaksi pisteeksi. Siispä virittäjäalkion reunakuvaus voidaan sieventää muotoon

$$\sigma_n \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1}.$$

Summan termit kumoavat toisensa, kun n on pariton, jolloin $\partial_n = 0$. Jos n on parillinen, niin yksi termi jää kumoutumatta, jolloin $\partial_n = \sigma_{n-1}$.

Selvästi parittomilla n :n arvoilla reunakuvauksen ∂_n ydin on $\text{Ker } \partial_n = \langle \sigma_n \rangle \cong \mathbb{Z}$ ja sen kuva on $\text{Im } \partial_n = 0$. Vastaavasti parillisilla arvoilla ydin on $\text{Ker } \partial_n = 0$ ja kuva on $\text{Im } \partial_n = \langle \sigma_{n-1} \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Näin ollen parittomilla asteilla n yleinen kolmiodomologiaryhmä on

$$H_n = \langle \sigma_n \rangle / \langle \sigma_n \rangle \cong \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \cong 0.$$

Parillisilla asteilla siitä tulee $H_n = 0/0 \cong 0$. Siispä kummassakin tapauksessa $H_n = 0$.

Jos sekä avaruuden että sen jonkin aliavaruuden täydet kolmiokompleksit tunnetaan, niin niille voidaan määrittää suhteellinen kolmiodomologia.

Määritelmä 2.102. (*Suhteellinen kolmiodomologia*) Olkoon $\mathcal{X}$ topologinen avaruus ja olkoon $A \subset \mathcal{X}$ sen aliavaruus. Niiden täysien kolmiokompleksien $S_*(\mathcal{X})$ ja $S_*(A)$ tekijäkompleksin kolmiodomologiaa $H_n(S_*(\mathcal{X})/S_*(A))$ kutsutaan *suhteelliseksi kolmiodomologiaksi*. Sitä merkitään $H_n(\mathcal{X}, A)$.  [32, s. 96]

2.4.3 Yksinkertainen kolmiodomologia

Yleisen kolmiodomologian suora laskeminen on lähtökohtaisesti hyvin työlästä, koska lähes jokaisen tavanomaisen avaruuden n -ketjujen ryhmällä on ylinumeroituvasti virittäjiä. Laskemista voidaan helpottaa yksinkertaisella kolmiodomologialla, joka antaa saman tuloksen kuin yleinen kolmiodomologia, mutta joka on määritelty vain tiettytyypisille avaruuksille.

Yksinkertaisen kolmiodomologian ideana on jakaa avaruus reunallisiin alueisiin, joista jokainen näyttää topologisesti suljetulta kuulalta. Kuulien sisäosien kolmiodomologiat ovat triviaaleja, jolloin tavoitteena on ilmaista avaruuden kolmiodomologia käyttäen pelkästään kuulien reunoja, jotka ovat yhtä ulottuvuutta pienempiä kuin alkuperäinen avaruus. Kun menetelmää jatketaan, niin lopulta päädytään tilanteeseen, jossa jäljellä on pelkkiä erillisiä pisteitä. Siispä yksinkertaisessa kolmiodomologiassa on tiedettävä jäljelle jäävien erillisten pisteiden lisäksi se tapa, miten ne ovat muodostaneet alkuperäiset alueet.

Täsmällisemmin yksinkertainen kolmiodomologia muodostetaan moniulotteisten kolmioiden avulla, jotka ovat homeomorfisia suljettuihin kuuliin. Käytännössä aluksi muodostetaan kolmioiden avulla raami ja sen jälkeen se kuvataan varsinaiseksi avaruudeksi, jonka tulee olla homeomorfinen raamin kanssa.

Määritelmä 2.103. (*Raami*) Olkoon K äärellinen kokoelma moniulotteisia kolmioita, joka täyttää kaksi ehtoa:

1. Jos $\triangle$ on joukon K kolmio, niin sen jokainen sivu kuuluu myös joukkoon K .

2. Jos $\triangle_i$ ja $\triangle_j$ ovat joukon K kolmioita, niin niiden leikkaus $\triangle_i \cap \triangle_j$ on joko tyhjä joukko tai joukon K kolmio.

Tällöin K on *muodollinen raami*, joka voidaan ilmaista puhtaan kombinatorisesti kokoelmana kärkipisteiden joukkoja. Se voidaan upottaa $(2d + 1)$ -ulotteiseen avaruuteen, jossa d on joukon K suuriulotteisimman kolmion ulottuvuus. Upotettua muodollista raamia kutsutaan vain *raamiksi*. Merkinnällä $|K|$ tarkoitetaan yhdistettä upotetun raamin kaikista kolmioista eli $|K| = \bigcup_{\triangle_i \in K} \triangle_i$.  [32, s. 131]

Raamia voidaan kutsua myös kolmioraamiksi tai simplikiaaniseksi kompleksiksi (lat. *simplices + complexus*).

Kolmioinnilla tarkoitetaan epämuodollisesti avaruuden täyttämistä moniulotteisilla kolmioilla. Täsmällisemmin ilmaistuna avaruuden on oltava homeomorfinen jonkin upotetun raamin kanssa. Yleisesti avaruuden kolmiointi ei ole yksikäsitteinen.

Menetelmä 2.104. (Kolmiointi) Olkoon $\mathcal{X}$ topologinen avaruus, K raami ja $\psi: K \rightarrow \mathcal{X}$ homeomorfismi. Paria (K, ψ) kutsutaan avaruuden $\mathcal{X}$ *kolmioinniksi*.  [32, s. 132]

Esimerkki 2.105. Torus voidaan kolmioida kolmessa vaiheessa. Aluksi muodostetaan muodollinen raami, joka koostuu 18 kolmiosta, 27 janasta ja yhdeksästä kärkipisteestä kuvan 9a mukaisesti. Kuvan neliön ylin ja alin reuna ovat samat, kuten ovat myös oikea ja vasen reuna. Se täyttää raamin ensimmäisen ehdon, koska jokaisen kolmion sivut ja jokaisen janan kärjet ovat myös raamissa. Lisäksi on selvää, että minkä tahansa kahden kolmion, janan tai kärjen leikkaus kuuluu myös raamiin.

Toisessa vaiheessa muodollinen raami upotetaan kolmiulotteiseen avaruuteen, jolloin päädytään kuvan 9b tilanteeseen. Siihen ei ole merkitty muodollisen raamin kuvassa näkyviä lävistäjiä.

Lopuksi raami kuvataan homeomorfisesti torukseksi. Kuvausta ei ole merkitty, mutta käytännössä se pyöristäisi kaikki kulmat vastaavalla tavalla kuin näyttäisi raamin puhaltaminen ilmapalloksi.

Raamit muodostavat kategorian, kun niiden välille määritellään ensiksi raamikuvaus. Sen ideana on raamin kuvaaminen joko sellaisenaan tai osittain litistettynä toiseksi raamiksi.

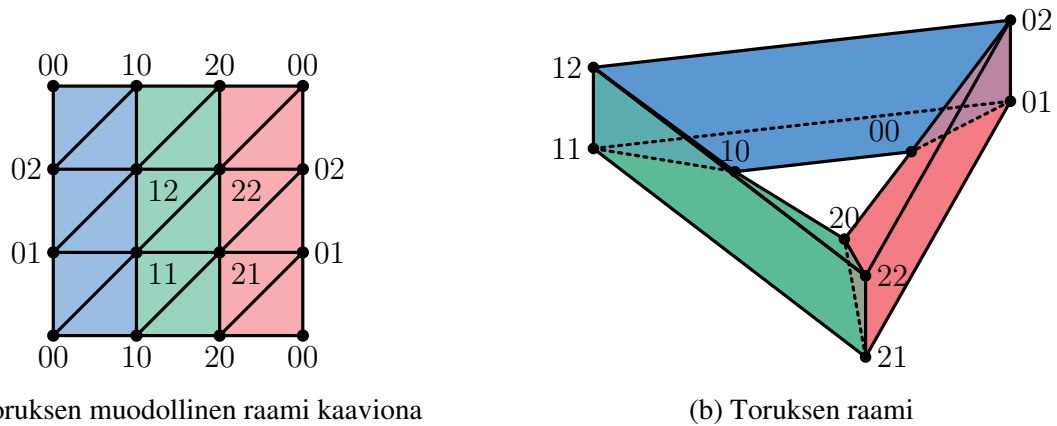
Määritelmä 2.106. (Raamikuvaus) Olkoot K ja L raameja. Kuvaus $r: K \rightarrow L$ on *raamikuvaus*, jos se kuvaa kaikki muodollisen raamin K kärkipisteet muodollisen raamin L kärkipisteiksi niin, että jos kärkien $k_0, \dots, k_n$ muodostama n -kolmio kuuluu raamiin K niin myös n -kolmio $r(k_0), \dots, r(k_n)$ kuuluu raamiin L .  [32, s. 136]

Määritelmä 2.107. (Raamien kategoria) Kaikki raamit ja niiden väliset raamikuvaukset muodostavat *raamien kategorian* **Raami**.  [32, s. 137]

Jotta raamien avulla saataisiin muodostettua järkevästi ketjukompleksi ja siten homologia, niin niiden sisältämille kärkipisteille on määrättävä järjestys.

Nimitys 2.108. (Suunnattu raami) Raami K on *suunnattu*, jos sen kaikille kärkipisteille on määritelty järjestys.  [32, s. 142]

Suunnatusta raamista voidaan muodostaa ketjukompleksi vastaavalla tavalla kuin yleisessä kolmionhomologiassa. Raamin n -ketjut vastaavat vapaita vaihdannaisia ryhmiä,



Kuva 9: Torus voidaan kolmioida 18 kolmiolla vasemmanpuoleisen kuvan muodollisen raamin mukaisesti, kun neliön ylin ja alin jana sekä vasen ja oikea jana tulkitaan samoiksi. Oikeanpuoleisessa kuvassa raami on upotettu kolmiulotteiseen avaruuteen, mutta selkeyden vuoksi siihen ei ole merkitty nelikulmioiden lävistäjiä.

joiden virittäjät ovat kaikki raamiin kuuluvat n -kolmiot. Käytännössä ryhmä kannattaa kuitenkin ilmaista muodossa, jonka virittäjät ovat n -jonoja ja säännöt rajoittavat jonot sellaisiksi, että niillä voi ilmaista jokaisen raamiin kuuluvan n -kolmion täsmälleen yhdellä tavalla.

Määritelmä 2.109. (Raamin n -ketju) Olkoon K suunnattu muodollinen raami. Olkoon V kokoelma, joka sisältää kaikki raamin n -kolmioiden kärkipisteiden jonot. Eli esimerkiksi, jos $\Delta^n = [k_0, \dots, k_n] \in K$, niin $(k_0, \dots, k_n) \in V$. Määritellään lisäksi sääntöjoukko R , joka muodostuu kahden tyyppisistä säännöistä:

1. Kun $k_i = k_j$, joillakin erillisillä indekseillä $i \neq j$, niin $(k_0, \dots, k_n) = 0$.
2. Kaikki permutaatiot ovat samat eli $(k_0, \dots, k_n) = (k_{\pi_0}, \dots, k_{\pi_n})$.

Raamin n -ketju on vaihdannainen ryhmä $C_n(K)$, jonka esitys on $\langle V \mid R \rangle$. [32, s. 143]

Raamin ketjujen väliset differentiaalit on määritelty myöskin samalla tavalla kuin yleisessä kolmiohomologiassa eli jokainen n -kolmio kuvautuu sen etumerkillisien sivujen summaksi.

Määritelmä 2.110. (Raamin differentiaali) Olkoon K suunnattu raami. Tällöin sen n -ketjujen väliset differentiaalit ovat muotoa

$$\begin{aligned} \partial_n: C_n(K) &\rightarrow C_{n-1}(K) \\ (k_0, \dots, k_n) &\rightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i (k_0, \dots, k_{i-1}, \cancel{k_i}, k_{i+1}, \dots, k_n), \end{aligned}$$

jossa merkintä $\cancel{k_i}$ tarkoittaa jälleen kärjen poistoa.

[32, s. 143]

Raamin n -ketjuista ja differentiaaleista voidaan muodostaa yksinkertainen kolmio-kompleksi.

Määritelmä 2.111. (*Yksinkertainen kolmiokompleksi*) Olkoon K suunnattu raami. Sen yksinkertainen kolmiokompleksi on

$$C_*(K): \quad \left(\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \right).$$

Raamin n -ketjut ja differentiaalit ovat $C_n(K)$ ja ∂_n vastaavasti.  [32, s. 144]

Yksinkertaisen kolmiokompleksin homologiaryhmät voidaan laskea käyttäen homologian yleistä määritelmää ja sen indusoidut ketjukuvaukset ovat vastaavat kuin yleisessä kolmiorhomologiassa. Näin ollen voidaan määritellä yksinkertainen kolmiorhomologia kategoriateoreettisessa muodossa ylinuolena.

Määritelmä 2.112. (*Yksinkertainen kolmiorhomologia*) Olkoon K suunnattu raami. Tällöin yksinkertainen kolmiorhomologiaryhmä ja yksinkertaisien kolmiokompleksien väliset indusoidut ketjukuvaukset voidaan määritellä vastaavasti kuin yleiselle kolmiorhomologialle. Lopulta saadaan ylinuoli $H_n: \mathbf{Raami} \rightarrow \mathbf{Ab}$, jota kutsutaan *yksinkertaiseksi kolmiorhomologiaksi*.  [32, s. 144]

Raameille voidaan myöskin laskea Eulerin–Poincarén tunnus, joka ei riipu avaruudelle valitusta raamista.

Määritelmä 2.113. (*Eulerin–Poincarén tunnus*) Suunnatun raamin K Eulerin–Poincarén tunnus on

$$\chi(K) := \sum_{i=0}^n (-1)^i K_i,$$

jossa n on raamin suuriulotteisimman kolmion ulottuvuus ja K_i on raamin ulottuvuutta i olevien kolmioiden määrä.  [32, s. 145]

Osoittautuu, että yleinen kolmiorhomologia ja yksinkertainen kolmiorhomologia antavat saman tuloksen kaikille avaruuksille, joille ne molemmat voidaan laskea.

Lause 2.114. *Olkoon $\mathcal{X}$ kolmioituva topologinen avaruus. Tällöin sen yksinkertainen kolmiorhomologia on sama kuin sen yleinen kolmiorhomologia. Erityisesti se ei riipu valitusta raamista.*  [32, s. 151] ja [11, s. 128]

Yksinkertaisesta kolmiorhomologiasta on olemassa myös laskemista nopeuttava muoto, jossa raamien kolmioiden leikkausten ei tarvitse muodostaa aina kolmiota vaan niiden salitaan koostuvan useista erillisistä kolmioista. Muokattujen määritelmien rinnalla lasketaan toruksen yksinkertainen kolmiorhomologia.

Merkintä 2.115. (*Sisus*) Kun $\triangle^n$ on n -kolmio, ja $\partial\triangle^n$ on sen reuna, niin sen *sisus* on $\triangle^n := \triangle^n \setminus \partial\triangle^n$.  [11, s. 103]

Yleistetyssä kolmioinnissa ei puhuta kolmioiden leikkauksista vaan siinä tarkastellaan yksittäisen kolmion sivuja erikseen.

Menetelmä 2.116. (*Yleistetty kolmiointi*) Olkoon $\mathcal{X}$ topologinen avaruus. Olkoon lisäksi

J_Δ joukko moniulotteisia kolmioita, eli täsmällisemmin

$$J_\Delta := \{\triangle_0^0, \dots, \triangle_{i_0}^0, \triangle_{i_0+1}^1, \dots, \triangle_{i_1}^1, \triangle_{i_1+1}^2, \dots, \triangle_{i_n}^n\}.$$

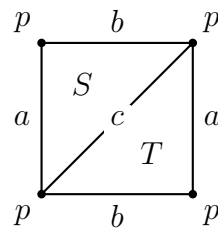
Määritellään jokaiselle joukon J_Δ kolmiolle $\triangle_j$ kuvaus $\psi_j: \triangle_j \rightarrow \mathcal{X}$. Oletetaan vielä, että kuvausten perhe $\Psi := \{\psi_0, \dots, \psi_{i_n}\}$ täyttää kolme ehtoa:

1. Kuvauksen rajoittuma kolmion sisukseen $\psi_j|_{\triangle_j^\circ}$ on injektio ja jokainen piste $x \in \mathcal{X}$ kuuluu täsmälleen yhden rajoittuman kuvaan.
2. Jos kuvaus ψ_j rajoitetaan kolmion $\triangle_j^m$ sivuun, niin on olemassa jokin indeksi l , jolla rajoittuma on täsmälleen sama kuin kuvaus $\psi_l: \triangle_l^{m-1} \rightarrow \mathcal{X}$.
3. Joukko $A \subset \mathcal{X}$ on avoin jos ja vain jos $\psi_j^\pm[A] \subset \triangle_j$ on avoin kaikilla j .

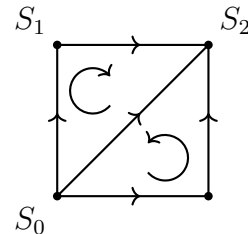
Tällöin joukkoa J_Δ ja kuvauksia Ψ kutsutaan avaruuden $\mathcal{X}$ *kolmioinniksi*. [11, s. 103]

Esimerkki 2.117. Torus voidaan muodostaa topologisesti neliöstä, kun sen vastakkaiset sivut liimataan toisiinsa. Siispä torus voidaan kolmioida helposti lisäämällä neliöön lävistäjä kuvan 10a mukaisesti. Liimauksen jälkeen päädytään tilanteeseen, jossa on yksi 0-kolmio eli piste p , kolme 1-kolmiota eli janat a, b ja c sekä kaksi tavallista 2-kolmiota S ja T .

Käytännössä jokainen toruksen piste kuuluu joko keskialueelle, jolloin se on 2-kolmioiden S tai T sisuksessa, viivoille, jolloin se on 1-kolmioiden a, b tai c sisuksessa tai kulmiin, jolloin se on sama kuin 0-kolmio p . Huomattavaa on myös, että mikään toruksen piste ei kuulu kahden eri moniulotteisen kolmion sisukseen.



(a) Kolmiodun toruksen osien nimet



(b) Osien suunnat sekä kolmion S kärkien numerointi

Kuva 10: Torus voidaan kolmioida jakamalla neliö kahteen kolmioon.

Raamin n -ketjujen yleistys ovat kolmioryhmät, jotka virittyvät yleistetyn kolmioinnin n -ulotteisilla kolmioilla.

Määritelmä 2.118. (Kolmioryhmä) Olkoon $\mathcal{X}$ kolmioitu topologinen avaruus. Olkoon $J_\Delta = \{\triangle_0^n, \dots, \triangle_m^n\}$ kaikkien n -kolmioiden joukko. Muodostetaan vapaa vaihdannainen ryhmä

$$G_n^\Delta := \langle \triangle_0^n, \dots, \triangle_m^n \rangle_+.$$

Sitä kutsutaan n -kolmioryhmäksi. Ryhmän alkioita voidaan merkitä tällöin myös muodossa $\sum_{i=0}^m k_i \triangle_i^n$, jossa $k_i \in \mathbb{Z}$ on n -kolmion $\triangle_i$ muodollinen kerroin. [11, s. 105]

Esimerkki 2.119. Olkoon torus kolmioitu kuvan 10a mukaisesti. Tällöin sillä on kaksi 2-kolmiota S ja T , kolme 1-kolmiota a , b ja c sekä yksi 0-kolmio p . Siispä toruksen kolmioryhmät sen kolmioinnin suhteen ovat

$$\begin{aligned} G_0^\Delta &= \langle p \rangle_+ = \{k_0 \cdot p \mid k_0 \in \mathbb{Z}\}, \\ G_1^\Delta &= \langle a, b, c \rangle_+ = \{k_1 \cdot a + k_2 \cdot b + k_3 \cdot c \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}\} \text{ ja} \\ G_2^\Delta &= \langle S, T \rangle_+ = \{k_4 \cdot S + k_5 \cdot T \mid k_4, k_5 \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Yksinkertaisen kolmiohomologian laskemisen toisessa vaiheessa n -kolmioiden sivuille on määriteltävä suunnat. Se voidaan tehdä vastaavasti kuin raamien tapauksessa.

Esimerkki 2.120. Torus, joka on kolmioitu kuvan 10a mukaisesti koostuu yhteensä kuudesta eriulotteisesta kolmiosta. Yksi tapa suunnata kolmiot on esitetty kuvassa 10b. Esimerkiksi kolmiosta $S := [S_0, S_1, S_2]$ voidaan poistaa pisteitä, jolloin saadaan sen kolmeksi sivuksi

$$[\cancel{S_0}, S_1, S_2] = b, \quad [S_0, \cancel{S_1}, S_2] = c \quad \text{ja} \quad [S_0, S_1, \cancel{S_2}] = a.$$

Sivujen a ja b suunnat ovat positiiviset, koska niistä on poistettu parillisen indeksin pisteet S_0 ja S_2 ja vastaavasti sivun c suunta on negatiivinen, koska poistetun pisteen S_1 indeksi on pariton.

Myöskin differentiaali eli reunakuvaus on määritelty samalla tavalla kuin raamien tapauksessa.

Esimerkki 2.121. Toruksen kolmioryhmän G_2^Δ virittäjät ovat S ja T . Kun reunakuvaukseen ∂_2 syötetään virittäjäkolmio $S = [S_0, S_1, S_2]$, saadaan

$$\partial_2(S) = \partial_2([S_0, S_1, S_2]) = [\cancel{S_0}, S_1, S_2] - [S_0, \cancel{S_1}, S_2] + [S_0, S_1, \cancel{S_2}] = b - c + a.$$

Vastaavalla tavalla myös toiselle virittäjälle pätee $\partial_2(T) = b - c + a$. Koska kolmioryhmän G_2^Δ alkiot voidaan esittää muodossa $k_4 \cdot S + k_5 \cdot T$ esimerkin 2.119 mukaisesti, niin yleinen alkio kuvautuu ryhmän G_1^Δ alkiksi

$$\partial_2(k_4 \cdot S + k_5 \cdot T) = k_4(b - c + a) + k_5(b - c + a) = (k_4 + k_5)(b - c + a).$$

Reunakuvaus ∂_1 kuvaa 1-kolmion $a = [a_0, a_1]$ alkiksi

$$\partial_1([a_0, a_1]) = [\cancel{a_0}, a_1] - [a_0, \cancel{a_1}] = p - p = 0.$$

Kärkiä a_0 ja a_1 ei ole merkitty kuvaan 10b, mutta voisi ajatella että neliön alanurkat vastaavat kumpikin kärkeä a_0 ja ylänurkat kärkeä a_1 . Joka tapauksessa ne kaikki samastuvat pisteeksi p . Samalla tavalla b ja c kuvautuvat reunakuvauksessa nolllaksi, jolloin kuvaus ∂_1 on triviaali.

Reunakuvaukset vastaavat ketjukompleksien differentiaaleja. Siispä yhdistämällä ne ketjukompleksin termejä vastaaviin kolmioryhmiin, saadaan muodostettua homologia.

Määritelmä 2.122. (*Yksinkertainen kolmiohomologia yleistetyn kolmioinnin avulla*) Olkoon $\mathcal{X}$ kolmioitu topologinen avaruus, jonka kolmioryhmät ovat $\{G_i^\Delta\}_{i=0}^\infty$ ja reunakuvaukset

$\{\partial_i\}_{i=0}^\infty$. Ne muodostavat ketjukompleksin

$$0 \xleftarrow{\partial_0} G_0^\Delta \xleftarrow{\partial_1} G_1^\Delta \xleftarrow{\partial_2} G_2^\Delta \xleftarrow{\partial_3} \dots$$

Sen homologia H_n on yksinkertainen kolmiohomologia.

[11, s. 106]

Esimerkki 2.123. Toruksen kolmioryhmät voidaan esittää isomorfisesti muodoissa

$$G_0^\Delta \cong \mathbb{Z}, \quad G_1^\Delta \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad G_2^\Delta \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad \text{ja} \quad G_n^\Delta \cong 0, \quad \text{jossa } n \geq 3.$$

Reunakuvauksien ominaisuudet voidaan päätellä esimerkistä 2.121. Reunakuvaus ∂_1 on triviaali, koska se kuvaa jokaiset virittäjät nolaksi. Reunakuvauksen ∂_2 ydin on isomorfinen kokonaislukuihin, koska se palauttaa arvon 0 täsmälleen, kun kertoimet ovat $k_4 = -k_5$. Reunakuvauksen ∂_2 kuva $\text{Im } \partial_2$ on niin ikään isomorfinen kokonaislukuihin, koska lauseke $(k_4 + k_5)(b - c + a)$ virittää yhden suoran. Kaikki muut reunakuvaukset ovat triviaaleja, koska niiden lähtö- tai maaliryhmät ovat triviaaleja.

Siispä toruksen yksinkertaiset kolmiohomologiaryhmät ovat

$$\begin{aligned} H_0 &= \text{Ker } \partial_0 / \text{Im } \partial_1 \cong \mathbb{Z}, \\ H_1 &= \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \\ H_2 &= \text{Ker } \partial_2 / \text{Im } \partial_3 \cong \mathbb{Z} \quad \text{ja} \\ H_n &= \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1} \cong 0, \quad \text{kun } n \geq 3. \end{aligned}$$

2.4.4 Soluhomologia

Kolmas kolmiohomologian muoto on soluhomologia. Se voidaan laskea kaikille solukoille, jotka ovat sellaisia Hausdorffin avaruuksia, joiden topologia on heikko ja jonka solujen sulkeumat leikkaavat vain äärellisen määrän muita soluja.

Muistutus 2.124. (*Hausdorff*) Avaruus $\mathcal{X}$ on *Hausdorff*, jos kaikilla erillisillä pisteillä $a, b \in \mathcal{X}$ on erilliset ympäristöt $U_a, U_b \subseteq \mathcal{X}$. [36, s. 11]

Heikolla topologialla tarkoitetaan tässä tapauksessa perinteisen määritelmän mukaista topologiaa, jonka suljetut joukot saadaan leikkauksina määrittelyavaruuksista. Parempi ja nykyaikaisempi termi voisi olla maalitopologia eli koindusoitu topologia.

Määritelmä 2.125. (*Heikko topologia*) Olkoot $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ mahdollisesti päällekkäisiä topologioita avaruuksia ja olkoon $\mathcal{X} = \bigcup \mathcal{X}_i$ niiden yhdiste. Oletetaan lisäksi, että kaikki leikkaukset $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j$ ovat suljettuja ja niitä vastaavien avaruuksien $\mathcal{X}_i$ ja $\mathcal{X}_j$ topologiat ovat samat. Tällöin avaruuden $\mathcal{X}$ *heikon topologian* kaikki suljetut joukot $A \in \mathcal{X}$ ovat sellaiset, joille $A \cap \mathcal{X}_i$ on suljettu kaikilla indekseillä $i \in I$. [32, s. 196]

Soluilla tarkoitetaan tavallisen n -ulotteisen avaruuden kuulien kanssa homeomorfisia joukkoja, mutta ne voidaan käytännössä ajatella upotettuina kuulina.

Määritelmä 2.126. (*Solu*) Joukkoa e^n kutsutaan *n -soluksi*, jos se on homeomorfinen n -ulotteisen kuulan kanssa. [32, s. 186]

Solutopologian toinen päävaatimus on heikon topologian lisäksi sulkeumien äärellisyys.

Määritelmä 2.127. (*Sulkeumien äärellisyys*) Olkoon $\mathcal{X}$ topologinen avaruus ja E joukko sen n -soluja. Jos jokaisen solun $e \in E$ sulkeuma $\bar{e}$ kuuluu äärelliseen määrään joukon E soluja, niin joukko E on *äärellissulkeumallinen* avaruudessa $\mathcal{X}$.  [32, s. 199]

Solukot eli CW-kompleksit (engl. *closure-finiteness + weak topology*) ovat soluhomologian perusta. Kahden päävaatimuksen eli sulkeumien äärellisyyden ja heikon topologian lisäksi solukoiden on oltava Hausdorffin avaruuksia ja niiden on muodostuttava jonosta soluja. Käytännössä voidaan ajatella, että solukko voidaan rakentaa liimaamalla soluja yksi kerrallaan.

Määritelmä 2.128. (*Solukko*) Olkoon E joukko n -soluja. Olkoon $\mathcal{X}$ niistä muodostettu Hausdorffin avaruus $\mathcal{X} = \bigcup\{e \mid e \in E\}$, jonka topologia on sulkeumien $\{\bar{e} \mid e \in E\}$ määräämä heikko topologia ja jonka suhteen E on äärellissulkeumallinen. Olkoon lisäksi $\Phi = \{\phi_e \mid e \in E\}$ joukko suhteellisia homeomorfismeja

$$\phi_e: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (e \cup \mathcal{X}^{(n-1)}, \mathcal{X}^{(n-1)}),$$

jossa n on solun e ulottuvuus, D^n on n -ulotteinen kiekko ja merkintä $\mathcal{X}^{(n-1)}$ tarkoittaa $(n-1)$ -rankaa eli yhdistettä $\bigcup\{e^k \in E \mid k \leq n-1\}$. Tällöin kolmikko $(\mathcal{X}, E, \Phi)$ on *solukko*.  [32, s. 198]

Jokainen solukko on mahdollista järjestää solumuotoiseksi suodatuksi. Käytännössä solukon n -rangat voidaan järjestää jonoon, jossa kaikki korkeintaan n -ulotteiset solukot sisältyvät $(n+1)$ -rankaan.

Määritelmä 2.129. (*Suodatus*) Olkoon $\{\mathcal{X}_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ jono toisiinsa sisältyviä aliavaruuksia, joille siis $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}_{i+1}$ kaikilla indekseillä i . Sitä kutsutaan *suodatuksi*.  [32, s. 212]

Määritelmä 2.130. (*Solumuotoinen suodatus*) Olkoon $\{\mathcal{X}_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ suodatus, jolle:

1. Kaikilla indekseillä $i \neq n$ pätee $H_i(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_{i-1}) = 0$.
2. Jokaiselle n -kolmion kuvalla $\sigma: \Delta^n \rightarrow \mathcal{X}$ on olemassa indeksi i , jolle $\text{Im } \sigma \subset \mathcal{X}_i$.

Tällöin $\{\mathcal{X}_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ on *solumuotoinen suodatus*.  [32, s. 212]

Soluhomologia saadaan muodostettua solumuotoisen suodatuksen suhteellisista kolmihomologiaryhmistä.

Määritelmä 2.131. (*Soluhomologia*) Olkoon $\mathcal{X}$ topologinen avaruus, jolle on olemassa solumuotoinen suodatus $\{\mathcal{X}_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Tällöin sen *soluhomologia* on $H_n(\mathcal{X}) = H_n(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}_{n-1})$. Ketjukuvaukset ovat muotoa $d_n: \partial_n \star i_*$ kaavion 20 mukaisesti.

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}_{n-1}) & & \\ \downarrow \partial_n & \searrow d_n & \\ H_{n-1}(\mathcal{X}_{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(\mathcal{X}_{n-1}, \mathcal{X}_{n-2}) \end{array} \quad (20)$$

Siinä ∂_n saadaan suhteellisen kolmihomologian pitkästä tarkasta jonosta ja i_* on inklusio-kuvauksen indusoima homomorfismi.  [32, s. 213]

3 Solmuteorian perusteet

3.1 Monisto

Monistot muodostavat pohjan solmujen määritelmälle. Lisäksi monet intuitiivisesti selvät solmujen ominaisuudet vaativat tiettyjä edellytyksiä solmujen käytökselle, kuten sileyttä. Siksi on syytä lyhyesti käsitellä monistojen perusominaisuudet.

Alaluvussa 3.1.1 määritellään monisto topologisesti. Alaluku 3.1.2 lisää topologiseen määritelmään muun muassa karttojen käsitteen, jolloin monistojen välisien kuvauksien sileys voidaan määritellä.

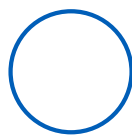
3.1.1 Topologinen monisto

Käytännössä topologinen monisto tarkoittaa sellaista topologista avaruutta, joka näyttää paikallisesti tarkasteltuna tavalliselta avaruudelta, mutta joka voi olla esimerkiksi kiertynyt. Lisäksi topologiselta monistolta vaaditaan kaksi täydentävää ominaisuutta. Ensimmäinen on niin kutsuttu täysi separoituvuus, joka estää sen, että avaruus koostuisi vaikkapa ylinumeroituvasta määrästä palasia. Ja toinen on Hausdorffin ehto, jonka seurauksena esimerkiksi kaksi origoa sisältävää suoraa ei kelpuuteta monistoksi.

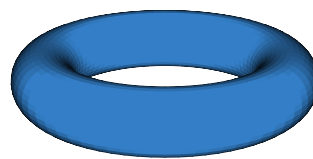
Muistutus 3.1. (*Täysi separoituvuus*) Avaruus $\mathcal{X}$ on täysin separoituva eli N_2 -numeroituva, jos sillä on numeroituva kanta.  [36, s. 93]

Määritelmä 3.2. (*Topologinen monisto*) Olkoon $\mathcal{X}$ täysin separoituva Hausdorffin avaruus. Se on n -ulotteinen monisto, jos jokaisella pisteellä $a \in \mathcal{X}$ on olemassa ympäristö U_a , joka on homeomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanssa.  [36, s. 115]

Esimerkki 3.3. Ympyrä on yksiulotteinen ja torus kaksiulotteinen monisto kuvan 11 mukaisesti.



(a) Ympyrä on yksiulotteinen monisto, koska paikallisesti minkä tahansa sen pisteen lähiympäristö näyttää suoralta.



(b) Torus on kaksiulotteinen monisto, koska paikallisesti minkä tahansa sen pisteen lähiympäristö näyttää tasolta.

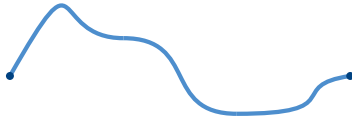
Kuva 11: Ympyrä ja torus ovat monistoja.

Useat monistoilta vaikuttavat avaruudet eivät aivan täytä moniston määritelmää. Yleensä ongelmana ovat reunapisteeet, joiden ympäristöt eivät näytä tavallisilta avaruuksilta. Tällaisia avaruuksia kutsutaan reunallisiksi monistoiksi silloin, kun reunapisteeet näyttävät suljetuilta puoliavaruuksilta.

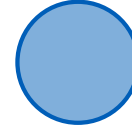
Määritelmä 3.4. (*Reunallinen monisto*) Olkoon $\mathcal{X}$ täysin separoituva Hausdorffin avaruus. Se on n -ulotteinen reunallinen monisto, jos jokaisella pisteellä $a \in \mathcal{X}$ on olemassa ympäristö

U_a , joka on homeomorfinen joko tavallisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ tai suljetun puoliavaruuden $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ kanssa.  [21, s. 2]

Esimerkki 3.5. Kahden pisteen välinen viiva on yksiulotteinen reunallinen monisto. Ja kiekko on kaksiulotteinen reunallinen monisto. Molemmat avaruudet on esitetty kuvassa 12.



(a) Viiva on yksiulotteinen reunallinen monisto, jonka reunapistet ovat sen päätepisteet.



(b) Kiekko on kaksiulotteinen reunallinen monisto. Sen reunapistet muodostavat sille kehän.

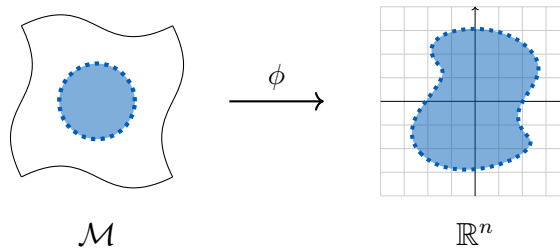
Kuva 12: Viiva ja kiekko ovat reunallisia monistoja. Moniston sisäpisteet on merkitty vaaleansinisellä ja reunapistet tummansinisellä värillä.

3.1.2 Sileä monisto

Jotta tavanomaiset differentiaali- ja integraalilaskennan käsitteet voitaisiin yleistää monistoille, niin on oltava jonkin tapa yhtenäisesti kuvata sen pisteet samanulotteiseen euklidiseen avaruuteen, jossa laskutoimitukset on jo määritelty. Tässä voidaan hyödyntää samaa ideaa kuin Maan kartastoissa, joissa pallon pinta on jaettu useisiin karttoihin.

Muistutus 3.6. (*Upotus*) Kuvaus $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ on *upotus*, kun siitä saadaan homeomorfismi rajaamalla maaliavaruus kuvajoukkoon $f[X]$.  [36, s. 38]

Määritelmä 3.7. (*Kartta*) Olkoon $\mathcal{M}$ topologinen monisto. Jos $U \subset \mathcal{M}$ on sen ympäristö ja $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on upotus, niin paria (U, ϕ) kutsutaan *kartaksi*. Tilanne on esitetty kuvassa 13, jossa ympäristöt U ja $\phi[U]$ on väritetty sinisellä.  [28, s. 5]



Kuva 13: Kartta (U, ϕ) kuvaa ympäristön $U \subset \mathcal{M}$ ympäristöksi $\phi[U] \subset \mathbb{R}^n$. Upotuksen lähtö- ja maalijoukot on merkitty sinisellä värillä.

Jotta kartoilla voitaisiin järkevästi kuvata koko moniston pinta, niin niiden on oltava yhteensopivia. Esimerkiksi Suomi voitaisiin kuvata kahdella hieman päällekkäisellä kartalla, joista toinen kattaa Suomen eteläpuolen ja toinen pohjoispuolen. Lähtökohtaisesti

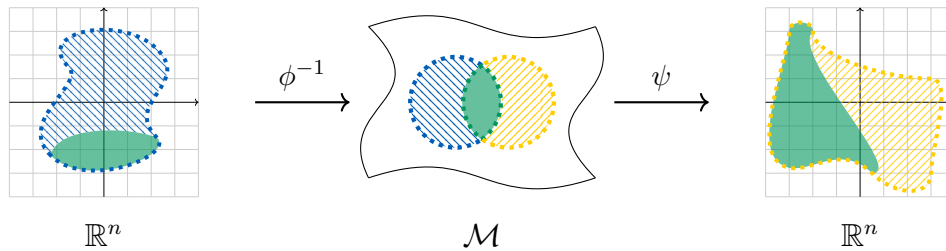
karttojen mittakaavat poikkeavat hieman toisistaan, jolloin tarvitaan jonkinlainen muunnos, jolla kartat voidaan yhdistää toisiinsa. Samaa ideaa voidaan hyödyntää yleisten monistojen kartoissa.

Määritelmä 3.8. (*Kartanvaihtokuvaus ja karttojen yhteensopivuus*) Olkoot (U, ϕ) ja (V, ψ) karttoja. Tällöin *kartanvaihdoksi* kutsutaan kuvausta

$$(\phi|_{U \cap V})^{-1} \star \psi: \phi[U \cap V] \rightarrow \psi[U \cap V].$$

Jos kartanvaihto on sileä ja sillä on sileä käänteiskuvaus, niin karttoja (U, ϕ) ja (V, ψ) sanotaan *yhteensopiviksi*.  [28, s. 7]

Kartanvaihtokuvausta $(\phi|_{U \cap V})^{-1} \star \psi$ on havainnollistettu kuvassa 14. Käytännössä siis vasemmanpuoleinen avaruus vastaa ensimmäistä karttaa (U, ϕ) , johon on merkitty myös leikkauksen kuva $\phi[U \cap V]$ kiinteällä vihreällä värillä. Vastaavasti oikeanpuoleisessa avaruudessa on kartta (V, ψ) ja sen ympäristö $\psi[U \cap V]$. Koska kartta (U, ϕ) on upotus, niin voidaan muodostaa käänteiskuvaus ϕ^{-1} , joka on merkitty kuvan vasemmanpuoleiseksi nuoleksi. Näin ollen, kun käänteiskuvausta ϕ^{-1} rajoitetaan vielä ympäristöjen U ja V yhteisiin pisteisiin, saadaan yhdistetty kuvaus $(\phi|_{U \cap V})^{-1} \star \psi$. Se kulkee tavallisten avaruuksien välillä, joten sen sileys tarkoittaa yksinkertaisesti kaikkien derivaattojen jatkuvuutta.



Kuva 14: Kartanvaihtokuvaus kartasta (U, ϕ) karttaan (V, ψ) kuvaa kiinteällä vihreällä merkityt alueet toisikseen. Kartan (U, ϕ) ympäristöt on merkitty kaakkoon laskevilla sini-sillä raidoilla ja kartan (V, ψ) ympäristöt koilliseen nousevilla keltaisilla raidoilla.

Jos koko monisto voidaan kartoittaa niin, että kaikki kartat ovat yhteensopivia, niin sellaista kokoelmaa karttoja kutsutaan kartastoksi. Esimerkiksi koko maapallon kattavaa tavallista maailmankartastoa voidaan pitää myös matemaattisena kartastona.

Määritelmä 3.9. (*Kartasto*) Olkoon $\mathcal{M}$ topologinen monisto. Sen pareittain yhteensopivien karttojen kokoelmaa $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ kutsutaan *sileäksi kartastoksi*, kun $\{U_i\}_{i \in I}$ on avaruuden $\mathcal{M}$ avoin peite.  [28, s. 7]

Jos $\mathcal{M}$ on yksi-, kaksi- tai kolmiulotteinen monisto, niin sen kaikki kartastot ovat oleellisesti samoja. Kuitenkin korkeammissa ulottuvuuksissa on joissakin tapauksissa mahdollista, että samalla avaruudella on monta aidosti erilaista kartastoa. Siksi on tärkeää ilmoittaa moniston lisäksi käytettävä kartastotyyppi, jota sanotaan sileäksi rakenteeksi. Moniston ja kartaston muodostamaa paria kutsutaan sileäksi monistoksi.

Määritelmä 3.10. (Sileä rakenne) Sileää kartastoa $\mathcal{U}$ kutsutaan *sileäksi rakenteeksi*, jos mille tahansa sileälle kartastolle $\mathcal{V}$, jolle $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, pätee $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Myös sileiden kartastojen ekvivalenssiluokista käytetään samaa nimitystä.  [28, s. 9] ja [18, s. 122]

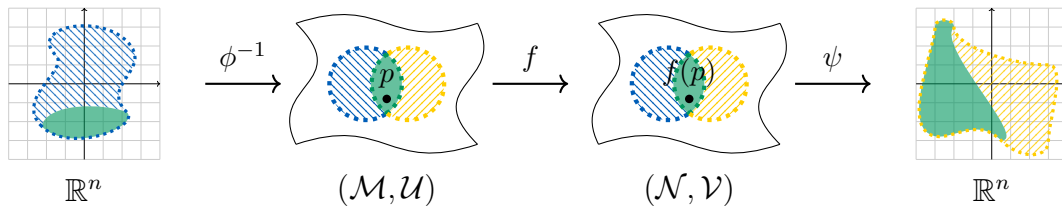
Määritelmä 3.11. (Sileä monisto) Olkoon $\mathcal{M}$ topologinen monisto ja $\mathcal{U}$ sen sileä kartasto. Tällöin $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$ on *sileä monisto*.  [28, s. 9]

Monistojen välisien kuvauksien sileyttä voidaan tutkia samanlaisella kikalla kuin karttojen yhteensopivuutta. Käytännössä kuvan 14 tilanteeseen vain lisätään yksi välivaihe, jossa siirrytään monistosta toiseen. Uusi tilanne on esitetty kuvassa 15.

Määritelmä 3.12. (Sileä kuvaus) Olkoot $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$ ja $(\mathcal{N}, \mathcal{V})$ sileitä monistoja, $p \in \mathcal{M}$ piste ja $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ kuvaus. Määritellään jokaiselle pisteen p kartalle $(U, \phi) \in \mathcal{U}$ ja jokaiselle pisteen $f(p)$ kartalle $(V, \psi) \in \mathcal{V}$ yhdistetty kuvaus

$$(\phi|_{U \cap f^{-1}[V]})^{-1} \star f \star \psi: \phi[U \cap f^{-1}[V]] \rightarrow \psi[f[U] \cap V].$$

Jos niistä jokainen on sileä, niin kuvaus f on *sileä pisteessä p* . Ja jos f on sileä jokaisessa moniston $\mathcal{M}$ pisteessä, niin sanotaan, että f on *sileä*.  [28, s. 21]



Kuva 15: Kuvaus f on sileä pisteessä p , kun jokaiselle parille karttoja (U, ϕ) ja (V, ψ) yhdistetty kuvaus $\phi^{-1} \star f \star \psi$ on jatkuvasti derivoituva, kun rajoitutaan lähtöjoukkoon $U \cap f^{-1}[V]$, joka on merkitty kiinteällä vihreällä värillä vasemmanpuoleisimpaan kuvaan. Ympäristöön U liittyvät joukot on merkitty kaakkoon laskevilla sinisillä raidoilla ja ympäristöön V liittyvät koilliseen nousevilla keltaisilla raidoilla.

Kahta sileää monistoa voidaan pitää kategorioteoreettiselta kannalta samoina, jos niiden välillä on diffeomorfismi.

Määritelmä 3.13. (Diffeomorfismi) Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ sileitä monistoja. Homeomorfismi $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ on *diffeomorfismi*, jos sekä f että f^{-1} ovat sileitä.  [18, s. 125]

3.2 Peiteavaruus

Peiteavaruudet mahdollistavat topologisen avaruuksien tarkastelemisen ryhmäteoreettisesti. Samalla tavalla kuin avaruutta voidaan tarkastella perusryhmän avulla, niin peiteavaruuksia voidaan tarkastella perusryhmien aliryhmien avulla. Siispä peiteavaruudet ovat tapa havainnollistaa perusryhmien rakennetta.

Alaluvussa 3.2.1 määritellään yleispeite, joka on peiteavaruus jokaiselle muulle peiteavaruudelle samalla tavalla kuin triviaali ryhmä on aliryhmä jokaiselle muulle aliryhmälle. Alaluku 3.2.2 keskittyy peitemuunnoksiin, joiden avulla on mahdollista kuvata peiteryhmä itselleen niin, että sen peitekuvauksen rakenne säilyy.

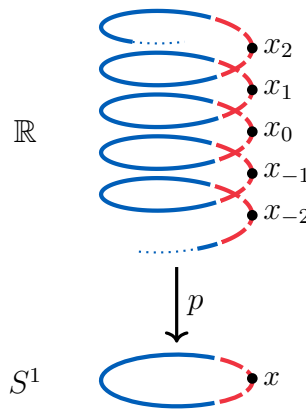
3.2.1 Yleispeite

Avaruuden $\mathcal{X}$ peiteavaruudella $\mathcal{Y}$ tarkoitetaan sellaista avaruutta, joka näyttää paikallisesti avaruudelta $\mathcal{X}$. Käytännössä voidaan ajatella, että $\mathcal{Y}$ koostuu monesta avaruuden $\mathcal{X}$ kopiosta, jotka ovat yleensä kiinnitettyinä toisiinsa. Alaluvun pääkäsitteenä on yleispeite, joka on sellainen peiteavaruus, joka on polkuyhtenäinen ja jonka perusryhmä on triviaali. Jotta avaruudella olisi yleispeite, niin sen on täytettävä tietyt vaatimukset, joita varten on kerrattava muutama peruskäsite.

Muistutus 3.14. (Peiteympäristö) Olkoon $p: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ jatkuva surjektio ja $U_x \subseteq \mathcal{X}$ pisteen $x \in \mathcal{X}$ ympäristö. Olkoon lisäksi $(V_i)_{i \in I}$ perhe erillisiä ympäristöjä $V_i \subseteq \mathcal{Y}$, joille kuvaukset $p|_{V_i}: V_i \approx U_x$ ovat upotuksia. Ympäristö U_x on *peiteympäristö*, jos sen alkukuvalla on voimassa $p^{-1}[U_x] = \bigsqcup_{i \in I} V_i$.  [13, s. 24]

Muistutus 3.15. (Peitekuvaus ja peiteavaruus) Olkoon $\mathcal{X}$ topologinen avaruus, *perusavaruus*, ja $p: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ jatkuva surjektio. Jos jokaiselle pisteelle $x \in \mathcal{X}$ on olemassa peiteympäristö $U_x \subseteq \mathcal{X}$, niin p on *peitekuvaus* ja $\mathcal{Y}$ on *peiteavaruus*.  [13, s. 24]

Esimerkki 3.16. Ympyrän eräs peiteavaruus on reaalisuora kuvan 16 mukaisesti. Erityisesti jokaisen reaalipisteen lähiympäristöt näyttävät topologisesti samoilta kuin ympyrän ympäristöt. Kuvaan on merkitty myös pisteen x alkukuva $p^{-1}[\{x\}] = \{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$, jota kutsutaan *säikeeksi*.



Kuva 16: Eräs avaruuden S^1 peiteavaruus on $\mathbb{R}$. Kuvassa reaalisuora on kierretty spiraaliksi, jotta peitekuvauksen $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ perusajatus näkyisi mahdollisimman hyvin. Kuvaan on merkitty piste x sekä sen alkukuvapisteen $p^{-1}[\{x\}] = \{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$. Lisäksi eräs peiteympäristö U_x ja sen alkukuva on merkitty harvakatkoisella punaisella värillä.

Kuvassa 16 esitetty ympyrän peiteavaruus $\mathbb{R}$ on myös yleispeite, koska se on polkuyhtenäinen ja sen perusryhmä on triviaali.

Muistutus 3.17. (Polkuyhtenäisyys) Topologinen avaruus $\mathcal{X}$ on *polkuyhtenäinen*, jos jokaiset pisteet $x, y \in \mathcal{X}$ voidaan yhdistää polulla.  [36, s. 108]

Muistutus 3.18. (Yhdesti yhtenäisyys) Jos polkuyhtenäisen avaruuden $\mathcal{X}$ perusryhmä on $\pi_1(\mathcal{X}) = 0$, niin $\mathcal{X}$ on *yhdesti yhtenäinen*.  [13, s. 19]

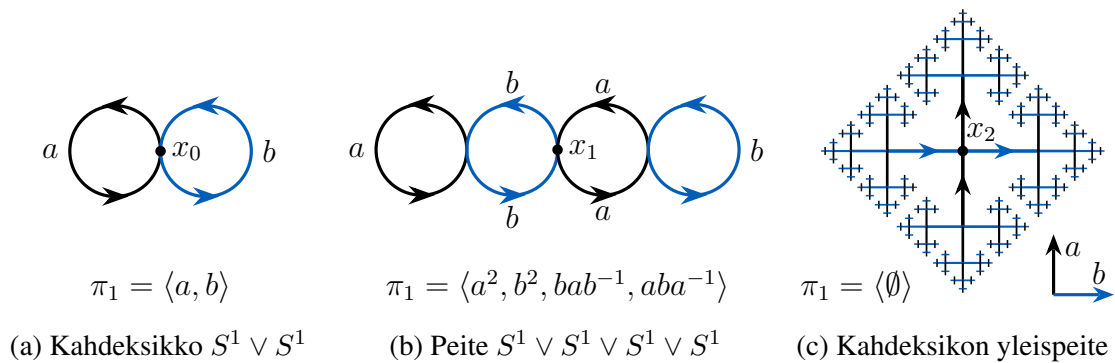
Määritelmä 3.19. (Yleispeite) Topologisen avaruuden $\mathcal{X}$ peiteavaruus $\tilde{\mathcal{X}}$ on *yleispeite*, kun se on yhdesti yhtenäinen.  [27, s. 36]

Esimerkki 3.20. Kahdeksikon muotoisella avaruudella $S^1 \vee S^1$ on useita erilaisia peiteavaruuksia. Itse asiassa mikä tahansa suunnattu verkko, jonka jokaisesta pisteestä lähtee ja johon tulee täsmälleen kaksi kaarta on kahdeksikon peite. Kuvaan 17 on piirretty kahdeksikon kolme erilaista peiteavaruutta.

Ensinnäkin kahdeksikko itse on oma peiteavaruutensa. Sen perusryhmän virittäjät ovat kaksi ympyrää, joita on merkitty kirjaimilla a ja b . Niistä kumpikin muodostaa kierroksen kahdeksikon muotoisen verkon ainoaan pisteeseen x_0 . Siispä pisteestä x_0 lähtee täsmälleen yksi kaari a ja yksi kaari b ja vastaavasti siihen tulee yhdet kaaret a ja b . Kahdeksikko on piirretty kuvaan 17a.

Myös neljän ympyrän ketju $S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$ on kahdeksikon peiteavaruus, koska sitä vastaavan verkon jokaisesta pisteestä lähtee ja niihin tulee täsmälleen yksi kaari a ja yksi kaari b kuvan 17b mukaisesti. Lisäksi avaruuden perusryhmä on neljän alkion vapaa ryhmä, joka voidaan kirjoittaa esimerkiksi muodossa $\langle a^2, b^2, bab^{-1}, aba^{-1} \rangle$. Siinä esimerkiksi alkio bab^{-1} kuvaa polkua, joka kulkee kantapisteestä x_1 vasemmalle ylempää kaarta pitkin, kiertää vasemmanpuoleisimman ympyrän ja palaa takaisin yläkaarta pitkin, jolloin se virittää vasemmanpuoleisimman ympyrän. Kun perusryhmä kirjoitetaan näin, niin on selvää, että se virittää alkuperäisen kahdeksikon perusryhmän $\langle a, b \rangle$ aliryhmän. Tämä pätee yleisemminkin peiteavaruuksien perusryhmille.

Viimeinen käsiteltävä peite on piirretty kuvaan 17c. Senkin jokaisesta pisteestä lähtee ja siihen tulee kaaret a ja b . Kahdesta muusta tapauksesta poiketen pisteitä on äärettömän monta. Koska tämä peiteavaruus on polkuyhtenäinen ja sen perusryhmä on triviaali, niin se on kahdeksikon yleispeite.



Kuva 17: Kahdeksikolla on useita peiteavaruuksia, joista kolme on piirretty tähän. Jokainen kuvien 17b ja 17c risteyskohta kuvautuu peitekuvauksessa kuvan 17a kahdeksikon ainoaksi risteykseksi x_0 . Kuviiin on merkitty mustalla ne kaaret, jotka kuvautuvat peitekuvauksessa kaareksi a ja sinisellä ne, jotka kuvautuvat kaareksi b . Erityisesti on huomattava, että kuvan 17b keskiympyrät koostuvat kumpikin kahdesta eri kaaresta. Kahdessa ensimmäisessä kuvassa jokaisen kaaren kuva on nimetty ja kolmannessa kuvassa kaikki pystysuuntaiset kaaret kuvautuvat kaareksi a ja kaikki vaakasuuntaiset kaareksi b . Avaruuksille valitut kantapisteet on erikseen merkitty mustina pisteinä x_0 , x_1 ja x_2 .

Kaikilla avaruuksilla ei ole yleispeitettä. Mutta jokaisella sellaisella yksiosaisella avaruudella, jonka pisteiden lähiympäristöt ovat hyvin käyttäytyviä, on yleispeite. Hyvin käyttäytymisellä tarkoitetaan tässä tapauksessa käytännössä sitä, että pisteen lähistöllä ei ole esimerkiksi äärettömän paljon pieniä reikiä. Täsmällisemmin ilmaistuna avaruuden on oltava polkuyhtenäinen, paikallisesti polkuyhtenäinen ja puolipaikallisesti yhdesti yhtenäinen.

Muistutus 3.21. (*Indusoitu homomorfismi*) Olkoot $(\mathcal{X}, x_0)$ ja $(\mathcal{Y}, y_0)$ kantapisteavaruuksia. Tällöin jatkuvasta kuvauksesta $f: (\mathcal{X}, x_0) \rightarrow (\mathcal{Y}, y_0)$ muodostettua kuvausta

$$\begin{aligned} f_*: \pi_1(\mathcal{X}, x_0) &\rightarrow \pi_1(\mathcal{Y}, y_0) \\ [\alpha]_{\mathcal{X}} &\mapsto [\alpha \star f]_{\mathcal{Y}} \end{aligned}$$

kutsutaan kuvauksen f indusoimaksi homomorfismiksi.

[13, s. 31]

Muistutus 3.22. (*Puolipaikallinen yhdesti yhtenäisyys*) Jos jokaisella avaruuden $\mathcal{X}$ pisteellä x on olemassa ympäristö U_x , jolle inklusiokuvauksen $\iota: U_x \rightarrow \mathcal{X}$ indusoima homomorfismi ι_* on triviaali, niin $\mathcal{X}$ on puolipaikallisesti yhdesti yhtenäinen.

[27, s. 43]

Muistutus 3.23. (*Paikallinen polkuyhtenäisyys*) Olkoon $\mathcal{X}$ topologinen avaruus. Jos jokaisen pisteen $x \in \mathcal{X}$ jokainen ympäristö $U_x \subseteq \mathcal{X}$ sisältää pisteen x polkuyhtenäisen ympäristön $V_x \subset U_x$, niin $\mathcal{X}$ on paikallisesti polkuyhtenäinen.

[27, s. 31]

Lause 3.24. Polkuyhtenäisellä, paikallisesti polkuyhtenäisellä ja puolipaikallisesti yhdesti yhtenäisellä avaruudella on yleispeite.

[27, s. 47] □

3.2.2 Peitemuunnos

Perusryhmillä ja peiteavaruuksilla on hyvin tärkeä keskinäinen suhde. Käytännössä hyvin käyttäytyvän avaruuden perusryhmän jokaista aliryhmää vastaa jokin peiteavaruus ja vastaavasti jokaista peiteavaruutta vastaa perusryhmän aliryhmä. Lisäksi perusryhmän ja sen normaalin aliryhmän tekijäryhmä on sama kuin peitemuunnosten ryhmä.

Peitemuunnos tarkoittaa sellaista kuvausta peiteavaruudelta itselleen, joka säilyttää peitekuvauksen.

Määritelmä 3.25. (*Peitemuunnos*) Olkoon $\mathcal{X}$ perusavaruus, $\mathcal{Y}$ sen peite ja $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ peitekuvaus. Homeomorfismi $\varphi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ on peitemuunnos, jos kaavio 21 on vaihdannainen.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{Y} \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & \mathcal{X} & \end{array} \quad (21)$$

Toisin sanoen $\varphi \star p = p$. Peitemuunnoksen synonyymi on säiemuunnos.

[27, s. 37]

Esimerkki 3.26. Kuvassa 16 on esitetty eräs ympyrän S^1 peiteavaruus, reaalisuora $\mathbb{R}$, joka on piirretty spiraalimuodossa. Sen peitekuvaus $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ voidaan esittää täsmällisesti muodossa $x \mapsto e^{2\pi i x}$, jossa ympyrä on kirjoitettu kompleksitason yksikköympyräksi.

Peiteavaruuden $\mathbb{R}$ eräs peitemuunnos $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on kuvaus, joka siirtää kuvaajaa yhden kierroksen ylöspäin eli $x \mapsto x + 1$. Se kuvaa esimerkiksi pisteen x_0 pisteeksi x_1 ja pisteen x_1 pisteeksi x_2 . Selvästi $\varphi \star p$ on edelleen peitekuvaus, koska jokaiselle ympyrän pisteelle on edelleen olemassa samat peiteympäristöt. Esimerkiksi kuvaan harvakatkoisella punaisella merkitty pisteen x peiteympäristö $U_x = \{e^{2\pi i x} \mid x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]\}$ kuvautuu samoiksi peiteavaruuden erillisiksi ympyröiksi sekä alkukuvassa $p^\leftarrow[U_x]$ että alkukuvassa $(\varphi \star p)^\leftarrow[U_x]$. Ne ovat

$$p^\leftarrow[U_x] = \left\{ x \mid x \in \left[-\frac{\pi}{3} + n, \frac{\pi}{3} + n \right], n \in \mathbb{Z} \right\}$$

ja

$$(\varphi \star p)^\leftarrow[U_x] = \varphi^\leftarrow[p^\leftarrow[U_x]] = \left\{ x - 1 \mid x \in \left[-\frac{\pi}{3} + n, \frac{\pi}{3} + n \right], n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Alkukuvat ovat samat muuttujanvaihdolla.

Peitemuunnoksen φ käänteiskuvaus φ^{-1} on myös peitemuunnos kuten on myös kahden peitekuvauksen yhdiste $\varphi_1 \star \varphi_2$. Siksi peitemuunnokset muodostavat ryhmän.

Määritelmä 3.27. (Peiteryhmä) Olkoon $p: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ peitekuvaus. Sen peitemuunnokset muodostavat *peiteryhmän*, jota merkitään $G_p(\mathcal{Y})$ tai $G(\mathcal{Y})$. Sen laskutoimituksena on peitekuvauksien yhdiste $\varphi_1 \star \varphi_2$.  [27, s. 37]

Esimerkki 3.28. Jatketaan jälleen kuvan 16 ympyrän S^1 ja spiraalin $\mathbb{R}$ tarkastelua. Esimerkin 3.26 mukaisesti eräs peitemuunnos on kuvaus, joka siirtää kuvaajaa yhden kierroksen ylöspäin. Vastaavasti mikä tahansa muu peitemuunnos siirtää kuvaajaa yhden tai useamman kierroksen ylös- tai alaspäin. Peitemuunnokset toimivat tässä tapauksessa samalla tavalla kuin kokonaisluvut yhteenlaskun suhteen eli esimerkiksi viisi kierrosta ylöspäin siirtävän peitekuvauksen φ_5 ja kolme kierrosta alaspäin siirtävän peitekuvauksen φ_{-3} yhdiste $\varphi_5 \star \varphi_{-3}$ on peitekuvaus φ_2 , joka siirtää spiraalia kaksi kierrosta ylöspäin. Siispä peiteryhmä on $G_p(\mathcal{X}) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

Perusryhmät ja peiteavaruudet liittyvät toisiinsa kahdella tärkeällä tavalla. Ensimmäinen lause liittyy toisiinsa kantapisteelliset peiteavaruudet ja perusryhmän aliryhmät. Käytännössä jokaista kantapisteellistä peiteavaruutta vastaa yksikäsitteinen perusryhmän aliryhmä.

Lause 3.29. *Olkoon $(\mathcal{X}, x_0)$ polkuyhtenäinen, paikallisesti polkuyhtenäinen ja puolipäikkäisesti yhdesti yhtenäinen kantapisteavaruus. Tällöin seuraavat kaksi joukkoa ovat bijektiiviset:*

1. *Polkuyhtenäisten peiteavaruuksien $p: (\mathcal{Y}, y_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$ isomorfialuokat.*
2. *Perusavaruuden $(\mathcal{X}, x_0)$ perusryhmän $\pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ aliryhmät.*

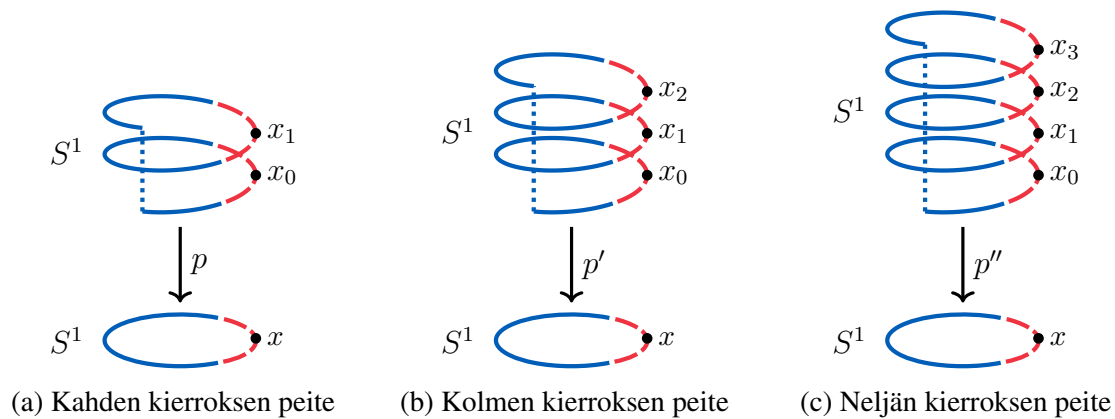
Isomorfismi saadaan kuvauksella $p_(\pi_1(\mathcal{Y}, y_0))$.*

 [11, s. 67] $\square$

Jos kantapisteet jätetään huomiotta, niin saadaan vastaava bijektio peiteavaruuksien $p: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ ja perusryhmän konjugaattiluokkien välillä.

Esimerkki 3.30. Ympyrän perusryhmä on $\pi_1(S^1) \cong (\mathbb{Z}, +)$. Sen aliryhmät ovat $0, \mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \dots$, jotka ovat siis muotoa $n\mathbb{Z}$. Lauseen 3.29 mukaan jokaista aliryhmää on vastattava peiteavaruus. Ympyrä itse vastaa täyttä aliryhmää $\mathbb{Z}$ ja reaalisuora vastaa yhden alkion aliryhmää 0 . Kaikki muut peiteavaruudet ovat isomorfisia kuvan 18 mukaisiin ympyröihin, jotka on kierretty n kierroksen peitteiksi.

Tutkitaan tarkemmin vaikkapa kuvan 18a mukaista kahden kierroksen spiraalia. Sen perusryhmä on $\pi_1(S^1, x_0) \cong (\mathbb{Z}, +)$. Koska spiraalin kerran kiertävä silmukka kuvautuu peitekuvauksessa p perusavaruuden (S^1, x) kaksi kertaa kiertäväksi ympyräksi, niin on selvää, että $p_*(\pi_1(S^1, x_0)) \cong \langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$. Toisin sanoen peitekuvauksen p jälkeen minkä tahansa peiteavaruuden (S^1, x_0) silmukan kierrosluku kaksinkertaistuu, jolloin on mahdollista päätyä täsmälleen perusavaruuden parilliskierroksiin silmukoihin.



Kuva 18: Avaruuden S^1 eräitä peiteavaruuksia ovat n -kierroksiset spiraalit S^1 . Katkovivalla yhdistetyt päätepisteet on ajateltava samoina. Kuviin on merkitty piste x sekä sen alkukuvapisteen x_i . Lisäksi eräs pisteen x peiteympäristö ja sen alkukuvat on merkitty harvakatkoisella punaisella värillä.

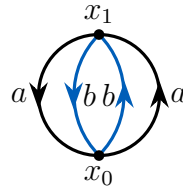
Toinen lause täydentää ensimmäistä kertomalla, minkälaisia ovat tiettyä peiteavaruutta vastaavat peiteryhmät. Lause pätee kuitenkin ainoastaan säännöllisille peiteavaruuksille, joilla tarkoitetaan käytännössä sellaisia peiteavaruuksia, joiden jokaiset samaan säikeeseen kuuluvat pisteet ovat topologisesti samanlaiset.

Määritelmä 3.31. (Säännöllinen peiteavaruus) Olkoon $p: (\mathcal{Y}, y_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$ peitekuvaus, $x \in \mathcal{X}$ perusavaruuden mielivaltainen piste ja $p^{-1}[\{x\}]$ sen säie. Peiteavaruus $\mathcal{Y}$ on *säännöllinen* eli *normaali*, jos mille tahansa säikeen pisteille y ja y' on olemassa sellainen peitemuunnos φ , jolle $\varphi(y) = y'$.

Vaihtoehtoisesti peiteavaruus on säännöllinen jos ja vain jos sen perusryhmä on perusavaruuden perusryhmän normaali aliryhmä eli $p_*(\pi_1(\mathcal{Y}, y_0)) \trianglelefteq \pi_1(\mathcal{X}, x_0)$. [11, s. 70]

Esimerkki 3.32. Kuvassa 17c esitetty kahdeksikon yleispeite on säännöllinen peiteavaruus, koska jokainen piste näyttää topologisesti samalta.

Vastaavasti kuvan 19 mukainen kaksipisteinen peiteavaruus on säännöllinen, koska pisteet x_0 ja x_1 voidaan muuntaa toisikseen peitemuunnoksella, joka kiertää ympyrää puoli kierrosta.



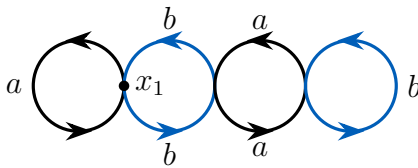
$$p_*(\pi_1(\mathcal{Y}, x_0)) = \langle a^2, b^2, ab \rangle = p_*(\pi_1(\mathcal{Y}, x_1))$$

Kuva 19: Oheinen kahdeksikon kaksipisteinen peiteavaruus on säännöllinen, koska kumpi tahansa pisteistä voidaan muuntaa toisiinsa niin, että kuvan rakenne ei muutu.

Esimerkki 3.33. Kahdeksikon nelilenkkiset peiteavaruudet eivät ole säännöllisiä, koska niiden määräämät perusavaruuden perusryhmän aliryhmät riippuvat valituista kantapisteistä. Esimerkiksi kuvien 20a ja 20b avaruuksien $(\mathcal{Y}, x_1)$ ja $(\mathcal{Y}, x_2)$ määräämät aliryhmät ovat

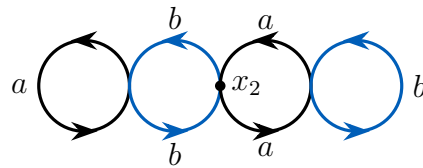
$$p_*(\pi_1(\mathcal{Y}, x_1)) = \langle a, b^2, ba^2b^{-1}, baba^{-1}b^{-1} \rangle \quad \text{ja} \quad p_*(\pi_1(\mathcal{Y}, x_2)) = \langle a^2, b^2, bab^{-1}, aba^{-1} \rangle.$$

Vaikka aliryhmät eivät ole samat, niin ryhmä $p_*(\pi_1(\mathcal{Y}, x_2))$ saadaan konjugoimalla ryhmää $p_*(\pi_1(\mathcal{Y}, x_1))$ alkiolla b .



$$p_*(\pi_1(\mathcal{Y}, x_1)) = \langle a, b^2, ba^2b^{-1}, baba^{-1}b^{-1} \rangle$$

(a) Peite $(\mathcal{Y}, x_1)$.



$$p_*(\pi_1(\mathcal{Y}, x_2)) = \langle a^2, b^2, bab^{-1}, aba^{-1} \rangle$$

(b) Peite $(\mathcal{Y}, x_2)$.

Kuva 20: Kahdeksikon nelilenkkiset peiteavaruudet ovat epäsäännölliset, koska valitsemalla samaan säikeeseen kuuluvat kantapisteet x_1 ja x_2 saadaan kahdeksikon perusryhmän kaksi eri aliryhmää.

Säännöllisen peiteavaruuden peiteryhmä on isomorfinen tekijäryhmään, joka saadaan jakamalla perusavaruuden perusryhmä säännöllistä peiteavaruutta vastaavalla normaalilla aliryhmällä.

Lause 3.34. Olkoon $p: (\mathcal{Y}, y_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$ säännöllinen peitekuvaus. Tällöin pätee

$$G(\mathcal{Y}) \cong \pi_1(\mathcal{X}, x_0) / p_*(\pi_1(\mathcal{Y}, y_0)).$$

Toisin sanoen peiteryhmä on isomorfinen siihen tekijäryhmään, joka saadaan jakamalla perusavaruuden perusryhmä peiteavaruuden perusryhmän kuvalla.  [11, s. 71] $\square$

Esimerkki 3.35. Kahdeksikolla $\mathcal{X}$ on useita säännöllisiä peiteavaruuksia, joihin lausetta 3.34 voidaan soveltaa. Lasketaan peiteryhmä yleispeitteelle, kahdeksikolle itselleen sekä erälle kahden pisteen peiteavaruudelle.

Kuvassa 17c on esitetty kahdeksikon yleispeite $\tilde{\mathcal{X}}$. Sitä vastaava normaali aliryhmä on $p_*(\pi_1(\tilde{\mathcal{X}})) = \langle \emptyset \rangle$, joten sen peiteryhmä on

$$G(\tilde{\mathcal{X}}) = \pi_1(\mathcal{X})/p_*(\pi_1(\tilde{\mathcal{X}})) = \langle a, b \rangle / \langle \emptyset \rangle = F_2.$$

Se on kahden alkion vapaa ryhmä. Käytännössä vapaita muuttujia a ja b vastaava peitemuunnos voisi esimerkiksi siirtää jokaisen risteyksen a pykälää oikealle ja b pykälää ylös.

Kahdeksikko itse on oma säännöllinen peitteensä, jolloin sen normaali aliryhmä on triviaali eli $G(\mathcal{X}) = \langle a, b \rangle / \langle a, b \rangle = \langle \emptyset \rangle$.

Kuvan 19 mukaisen kahden pisteen peiteavaruuden perusryhmä on kolmen alkion vapaa ryhmä. Sitä vastaava aliryhmä on $p_*(\pi_1(\mathcal{Y})) = \langle a^2, b^2, ab \rangle$, jolloin peiteryhmäksi tulee

$$G(\mathcal{Y}) = \pi_1(\mathcal{X})/p_*(\pi_1(\mathcal{Y})) = \langle a, b \rangle / \langle a^2, b^2, ab \rangle = \langle a, b \mid a^2, b^2, ab \rangle.$$

Säännöstä $a^2 = e$ seuraa, että $a = a^{-1}$. Kun se yhdistetään sääntöön $ab = e$ eli $b = a^{-1}$, niin saadaan yhtäsuuruus $a = b$. Siispä peiteryhmä voidaan sieventää muotoon

$$G(\mathcal{Y}) = \langle a \mid a^2 \rangle = \mathbb{Z}_2,$$

joka on kahden alkion syklinen ryhmä. Tämä on ilmeistä myös suoraan kuvasta 19, koska samaan säikeeseen kuuluvat pisteet x_0 ja x_1 voidaan vaihtaa keskenään.

3.3 Solmu

Solmuilla on keskeinen osa sekä Hovanovin homologiassa että Alexanderin polynomissa, jotka ovat työn päätuloksia. Kummatkin niistä ovat solmutunnuksia. Luku jakautuu kahteen alalukuun. Solmun yleinen määritelmä esitetään alaluvussa 3.3.1 ja alaluku 3.3.2 keskittyy solmutunnuksien käsittelyyn kolmivärittävyydestä kertovan esimerkin avulla.

3.3.1 Solmun määritelmä

Matemaattinen solmun määritelmä vastaa pitkälti arkikielestä tuttua solmua. Esimerkiksi arjen narua tai köyttä vastaa matemaattinen polku, joka voi olla kietoutunut itsensä ympäri. Eroavaisuutena on se, että matemaattisessa määritelmässä polun päät on aina kiinnitetty toisiinsa. Tämä vaatimus mahdollistaa erityyppisten solmujen vertailun ja luokittelun.

Määritelmä 3.36. (Solmu) Sileä upotus $K: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on *suunnattu solmu*. Maaliavaruutena voidaan myös käyttää palloa S^3 .  [30, s. 2 ja 13]

Solmulle on olemassa yleisempiä määritelmiä, joissa lähtöavaruutena on $(n - 2)$ -ulotteinen monisto ja maaliavaruuden ulottuvuus on n . Tässä työssä tutkitaan kuitenkin ainoastaan tavallisia solmuja, jotka ovat kuvauksia avaruuteen $\mathbb{R}^3$ tai S^3 . Pallo S^3 voidaan tulkita yhden pisteen kompaktisointina avaruudesta $\mathbb{R}^3$, johon lisätään äärettömyyspiste.

Solmut voidaan yleistää solmukoiksi, joissa on nimensä mukaisesti yhdistettynä useampi solmu. Solmukoista käytetään myös nimityksiä linkki (engl. *link*), kytky ja kytkös.

Määritelmä 3.37. (*Solmukko*) Sileä upotus $L: \bigsqcup_{i=1}^n S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on n -osainen *suunnattu solmukko*.  [30, s. 5]

Solmut ja solmukot voidaan kuvata 2-ulotteisina kaavioina, joissa kolmiulotteinen solmu on litistetty tasoon. Solmukaaviosta on pystyttävä selvittämään solmun alkuperäinen rakenne, jolloin litistykselle on asetettava kaksi vaatimusta. Ensinnäkin kaikkien risteyskohtien tulee olla erilliset, jotta tiedettäisiin, mihin suuntaan mikäkin polun osa jatkuu risteuksen jälkeen. Toisena vaatimuksena on, että risteuksen litistysuunnassa alemmaksi jäävä osa merkitään katkoksellä. Tämä on tärkeää, koska monessa tapauksessa risteuksen vaihtaminen päinvastaiseksi muuttaa solmun toisenlaiseksi.

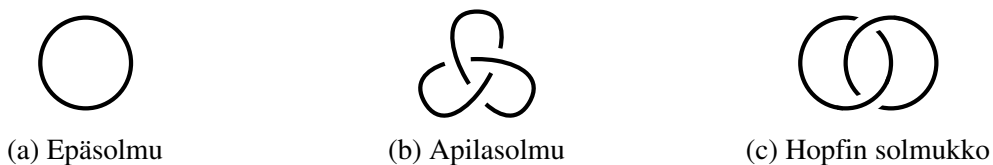
Muistutus 3.38. (*Immersio*) Olkoon $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ kuvaus. Se on *immersio*, jos jokaiselle pisteelle $x \in \mathcal{X}$ on olemassa ympäristö U_x , jolle $f|_{U_x}$ on upotus.  [36, s. 39]

Nimitys 3.39. (*Solmukaavio*) Olkoon $K: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ solmu ja $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ projektiokuvaus. *Solmukaavio* voidaan muodostaa, jos $K \star \pi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on immersio ja injektiivinen lukuun ottamatta yksittäisiä pisteitä, joita kutsutaan *risteyksiksi*. Solmukaavion risteykset on tapana piirtää siten, että se kaari, jonka z -koordinaatti on pienempi, katkaistaan.  [30, s. 3]

Esimerkki 3.40. Yksinkertaisin matemaattinen solmu on epäsolmu eli triviaali solmu, jonka solmukaavio on piirretty kuvaan 21a. Se vastaa arjen tilannetta, jossa köydessä ei ole solmua.

Alkeellisin arjen solmu on umpisolmu. Matemaattisesti sitä vastaa apilasolmu, jonka solmukaavio on esitetty kuvassa 21b.

Oikeanpuoleisimmassa kuvassa 21c on Hopfin solmukon kaavio. Se on yksinkertaisin solmukko, jossa kaksi solmua on kytkeytynyt toisiinsa niin, ettei niitä voida irrottaa toisistaan.



Kuva 21: Eräiden solmujen ja solmukoiden kaaviot.

3.3.2 Solmutunnus

Yksi mielenkiintoisimmista solmuihin liittyvistä kysymyksistä on, milloin kaksi solmua ovat samat eli milloin ne voidaan solmuja hajottamatta venyttää toisikseen. Kysymys voidaan jakaa kahteen osaan. Aluksi on määriteltävä, mitä ylipäänsä tarkoitetaan solmujen samuudella. Tämän jälkeen päästään hankalampaan osaan, jonka päämääränä on löytää täydellinen tapa jakaa solmut luokkiin, joissa kussakin on täsmälleen ne solmut, jotka ovat keskenään samat.

Solmujen samuus voidaan määritellä melko yksinkertaisesti. Käytännössä vaaditaan, että ensimmäinen solmu voidaan jatkuvasti muuntaa toiseksi solmuksi niin, että missään vaiheessa solmu ei leikkaa itseään.

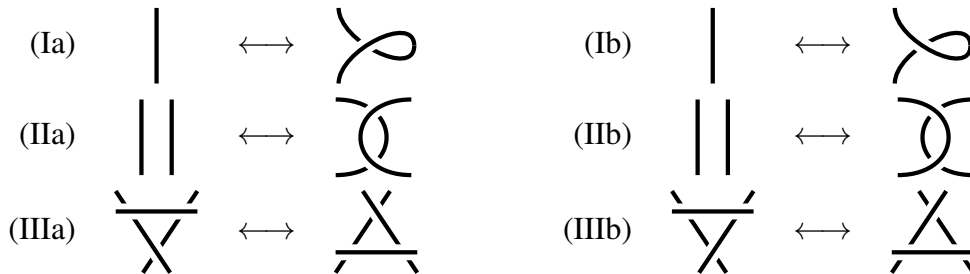
Määritelmä 3.41. (*Solmujen samanmuotoisuus*) Olkoot J ja K solmuja. Niiden sanotaan olevan *samanmuotoiset* tai *amat*, jos on olemassa sileä kuvaus $H: S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$, jolle $H_t := H|_{S^1 \times \{t\}}$ on solmu kaikilla $t \in I$ sekä $H_0 = J$ ja $H_1 = K$.  [30, s. 3]

Solmujen luokittelun tavoitteena on löytää jokaiselle solmulle helposti määriteltävä tunnus, joka antaa jokaiselle samalle solmulle saman tunnuksen ja jokaiselle eri solmulle eri tunnukset. Toistaiseksi ei tunneta mitään täydellistä tunnusta, joka olisi myös yksinkertainen laskea.

Määritelmä 3.42. (*Solmutunnus*) Kuvaus $f: K \mapsto f(K)$ on *solmutunnus*, jos se on määritelty kaikille solmuille ja se antaa saman tuloksen kaikille samanmuotoisille solmuille. Tässä $f(K)$ voi olla mikä tahansa olio.  [31, s. 47]

On osoitettu, että samanmuotoiset solmut voidaan muuntaa toisikseen niin kutsutuilla Reidemeisterin siirroilla, jotka ovat hyvin luonnollisia. Ensimmäinen siirto mahdollistaa silmukan suoristamisen, joka vastaa käytännössä löysällä olevan köyden kiristämistä. Toinen siirto sallii päällekkäin olevien köysien liu'uttamisen toistensa yli. Viimeinen siirto antaa luvan liikuttaa kolmesta köydenpätkästä ylintä kahden alla olevan köyden muodostaman risteyksen ylitse.

Määritelmä 3.43. (*Reidemeisterin siirto*) Olkoot D ja E solmukaavioita. Ne voidaan muuntaa toisikseen *Reidemeisterin siirrolla*, jos ne ovat samat lukuun ottamatta ympäristöä, joka näyttää kaavioissa joltain kuvan 24 mukaiselta parilta.  [23, s. 3]



Kuva 22: Reidemeisterin kolme siirtotyyppiä. Jokaisella siirrolla on kaksi yhtäpitävää muotoa.

Yksi luonnollisimmista solmutunnuksista on kolmivärittyvyys. Se on hyvin karkea solmutunnus, koska sen avulla solmut erottuvat ainoastaan kahteen eri luokkaan: värittyviin ja värittymättömiin.

Määritelmä 3.44. (*Kolmivärittyvyys*) Solmukaavio on *värittyvä*, jos sen kaaret voidaan värittää käyttäen vähintään kahta eri väriä niin, että jokaisen risteyksen kaaret ovat kaikki samaa tai kaikki eri väriä.  [8, s. 16]

Esimerkki 3.45. Apilasolmu on värittyvä kuvan 23b mukaisesti. Sen sijaan kuvan 23a epäsolmu ja kuvan 23c Hopfin solmukko eivät ole värittyviä.

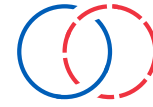
Tarkalleen ottaen esimerkin 3.45 väitteiden varmistamiseksi on vielä osoitettava, että värittyvyys ei riipu käytettävästä solmukaaviosta eli että se on todella solmutunnus.



(a) Epäsolmu on väritysmätön.
(Syy: Liian vähän värejä)



(b) Apilasolmu on värittyvä.



(c) Hopfin solmukko on väritysmätön. (Syy: Risteyksien värit)

Kuva 23: Eräiden solmukoiden kolmivärittyvyys. Osat on merkitty kiinteällä sinisellä, harvakatkoisella punaisella sekä tiheäkatkoisella vihreällä viivalla.

Lause 3.46. *Kolmivärittyvyys on solmutunnus.*

[8, s. 16]

Todistuksen idea. Jos värittyvyys säilyy kaikissa Reidemeisterin siirroissa, niin se on solmutunnus. Esimerkin vuoksi näytetään, että värittyvyys säilyy tyypin II siirrossa. On tarkasteltava kaikkia mahdollisia sallittuja värityksiä, joita on tässä tapauksessa kahta erilaista. Siirron jälkeen solmun osa voidaan värittää kuvan 24 mukaisesti, jossa värittyvyys säilyy. Se tarkoittaa, että näkyvät risteykset toteuttavat värittyvyyden vaatimukset ja lisäksi kaikki vapaat päät säilyttävät värinsä. $\square$



Kuva 24: Kolmivärittyvyyden säilyminen Reidemeisterin II-tyypin siirrossa. Osat on merkitty kiinteällä sinisellä, harvakatkoisella punaisella sekä tiheäkatkoisella vihreällä viivalla.

3.4 Alexanderin polynomi

Alexanderin polynomi on vanhin tunnettu polynomimuotoinen solmutunnus. Sen löysi yhdysvaltalainen matemaatikko James Waddell Alexander vuonna 1923. Ja toisin kuin vaikkapa Jonesin polynomin, Alexanderin polynomin määritelmä on hyvin tekninen ja siihen vaaditaan suhteellisen edistyneitä algebrallisen topologian tuloksia. Tämän työn määrittelytapaan tarvitaan muun muassa peiteavaruuksia, modulien rakennelauseita ja kolmiohomologiaa.

Alaluvussa 3.4.1 käydään läpi Alexanderin polynomin löytämisestä mahdollisesti edesauttaneita seikkoja ja esitetään tapa, jonka avulla sen määritelmä voisi tuntua luontaiselta. Alaluku 3.4.2 keskittyy Seifertin pintaan, jonka avulla voidaan muodostaa solmun komplementin ääretön syklinen peiteavaruus. Se on keskeisessä osassa alalukua 3.4.3, jossa siitä muodostetaan Alexanderin moduli, jonka ryhmänä on ensimmäinen kolmiohomologia-ryhmä ja jonka skalaarikertolasku voidaan muodostaa peiteryhmästä. Äärellisviritteisien modulien rakennelauseita hyödyntäen määritellään Alexanderin polynomi.

3.4.1 Alexanderin polynomin lähtökohta

Alexanderin polynomi löydettiin jo 60 vuotta ennen Jonesin polynomia. Vaikka Alexanderin polynomiin vaaditaan suurempi määrä edistyneitä algebrallisen topologian työkaluja kuin Jonesin polynomiin, niin se seuraa sinänsä melko yksinkertaisesti niistä. Tässä johdantomaisessa alaluvussa pyritään esittämään vaihe vaiheelta sellaista mahdollista ajatuksen kulkua, jonka avulla voitaisiin päätyä Alexanderin polynomiin.

Ensimmäiset luokitteluun mahdollisesti sopivat ja luonnolliselta vaikuttavat algebralliset työkalut ovat homotopiaryhmät, joilla voidaan erotella useita muita topologisia avaruuksia. Yleinen homotopiaryhmä on yleistys perusryhmästä, jossa silmukat on korvattu n -ulotteisilla pusseilla.

Määritelmä 3.47. (*Homotopiaryhmä*) Olkoon $(\mathcal{X}, x_0)$ kantapisteavaruus. Sen n :s homotopiaryhmä on

$$\pi_n(\mathcal{X}, x_0) = [\Sigma^n(\partial I); \mathcal{X}],$$

jossa $n \in \mathbb{Z}_+$ on positiivinen kokonaisluku. Merkintä $[\mathcal{X}; \mathcal{Y}]$ tarkoittaa joukkoa, joka koostuu kantapisteestä säilyttävistä jatkuvien kuvauksien $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ homotopialuokista ja $\Sigma^n(\partial I)$ on n -kertainen suspensio, josta siis muodostuu pussi S^n . Kun $n = 0$, niin homotopiaryhmä on $\pi_0 = [\partial I, \mathcal{X}]$.  [34, s. 371]

Jos homotopiaryhmät laskettaisiin suoraan solmuille, niin jokaiselle solmulle K tulisi samat ryhmät, jotka olisivat $\pi_1(K) = \mathbb{Z}$, kun $n = 1$ ja $\pi_n(K) = 0$ muulloin. Kuitenkin, jos tutkitaan solmujen komplementteja, niin saadaan parempi solmutunnus.

Määritelmä 3.48. (*Solmun komplementti*) Olkoon K solmu. Sen komplementti on

$$X_K = \mathbb{R}^3 \setminus K.$$

Avaruutena voisi myös olla S^3 . Lisäksi, jotta komplementti säilyisi monistona, niin komplementti voidaan ottaa myös solmun putkiympäristön sisuksesta.  [30, s. 13]

Kun tutkitaan komplementin perusryhmää, niin saadaan hyvä solmutunnus, jota kutsutaan solmun ryhmäksi. Se ei erottele peilisolmuja, mutta sillä voidaan erotella kaikki alkusolmut toisistaan. Lisäksi on olemassa tapa muodostaa solmun ryhmä niin kutsutun Wirtingerin esityksen avulla.

Määritelmä 3.49. (*Wirtingerin esitys*) Solmun K ryhmän Wirtingerin esitys on

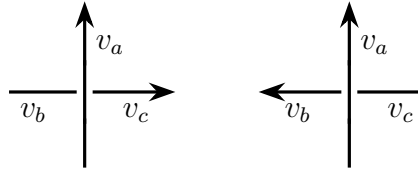
$$\pi_1(X_K) = \langle v_1, \dots, v_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle,$$

jossa virittäjät v_i vastaavat suunnatun solmukaavion yhtenäisiä osia ja säännöt r_j saadaan kaavion risteysistä. Ne ovat muotoa $v_a v_b v_a^{-1} v_c^{-1}$, kun alemman osan suunta on ylempään nähden oikealle tai $v_a^{-1} v_b v_a v_c^{-1}$, kun suunta on vasemmalle. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 25.  [13, s. 51]

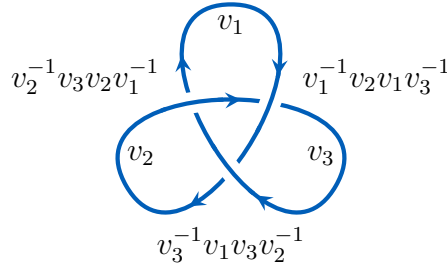
Esimerkki 3.50. Kuvan 26 mukaisen suunnatun apilasolmun Wirtingerin esitys on

$$G = \langle v_1, v_2, v_3 \mid v_1^{-1} v_2 v_1 v_3^{-1}, v_2^{-1} v_3 v_2 v_1^{-1}, v_3^{-1} v_1 v_3 v_2^{-1} \rangle. \quad (22)$$

Se voidaan muuntaa myös lyhyempään muotoon $\langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$.



Kuva 25: Wirtingerin esityksen sääntöjen muodostuminen.



Kuva 26: Apilasolmun Wirtingerin esitys.

Wirtingerin esityksen huono puoli on, että vaikka muodostuva ryhmä on sama kaikille saman solmun eri solmukaavioille, niin ei tunneta nopeasti laskettavaa tapaa vertailla eri esityksiä. Tämän vuoksi haluttaisiin löytää jokin tapa muokata ryhmän esitystä helposti laskettavaan muotoon. Yksi vaihtoehto on ryhmän kirjoittaminen vaihdannaisessa muodossa eli abelointi.

Menetelmä 3.51. (Abelointi) Olkoon G ryhmä, jonka esitys on $G = \langle v_0, \dots, v_n \mid r_0, \dots, r_m \rangle$. Sen *abeloitu* muoto on sellainen, jossa laskutoimitus on muutettu vaihdannaiseksi. Täsmällisemmin muotoiltuna abeloitu ryhmä voidaan muodostaa alkuperäisestä esityksestä lisäämällä säännöt $v_i v_j = v_j v_i$ kaikille virittäjille.

Jokaisen solmun ryhmä on abeloituna isomorfinen kokonaislukujen ryhmään. Tämä johtuu siitä, että jokainen Wirtingerin sääntö on muotoa $v_a v_b v_a^{-1} v_c^{-1}$ eli $v_a v_b = v_c v_a$. Se on abeloituna $v_a + v_b = v_c + v_a$, josta voidaan vaihdannaisuuden perusteella poistaa kummaltakin puolelta virittäjä v_a , jolloin jäljelle jää $v_b = v_c$. Tämän vuoksi lopulta jokainen virittäjä osoittautuu samaksi ja kaikki säännöt ovat muotoa $v_i = v_j$. Ylimääräiset virittäjät ja säännöt voidaan poistaa, jolloin ryhmäksi tulee ryhmä $\langle v_a \mid \emptyset \rangle$, joka on isomorfinen kokonaislukujen ryhmään.

Alexanderin polynomin tarkoituksena on yhdistää solmun ryhmän ominaisuudet hyvänä solmutunnuksena ja abeloidun muodon laskettavuus. Käytännössä se onnistuu niin, että solmusta muodostetaan sellainen peiteavaruus, jonka peiteryhmänä ovat kokonaisluvut eli solmun abeloitu ryhmä. Tätä varten tarvitaan Seifertin pinnan käsitettä.

Kun sopiva peiteavaruus on löydetty, niin siitä voidaan ottaa ensimmäinen kolmiohomologiaryhmä. Kun se edelleen yhdistetään peiteryhmään, niin muodostuu moduli. Se voidaan pilkkoa äärellisviritteisien modulien rakennelauseella kiertymämoduleiksi, joiden kertoimista muodostuu Alexanderin polynomi.

3.4.2 Seifertin pinta

Seifertin pinnan ajatus on hyvin yksinkertainen. Se on kaksiulotteinen pinta, jonka reunana on tarkasteltava solmu.

Määritelmä 3.52. (*Seifertin pinta*) Suunnatun solmukon L Seifertin pinta on yhtenäinen, kompakti ja suunnattu reunallinen 2-monisto $\mathcal{M}$, joka on upotettu avaruuteen S^3 ja jonka suunnattu reuna on $\partial\mathcal{M} = L$.  [23, s. 15]

Lause 3.53. Jokaisella suunnatulla solmukolla on Seifertin pinta.  [23, s. 16] $\square$

Seifertin pinta voidaan muodostaa mille tahansa solmukolle käyttäen Seifertin menetelmää. Sen tarkoituksena on muuttaa valittu solmukon kaavio risteys kerrallaan pinnaksi niin, että solmukon kaarien kolmiulotteinen rakenne säilyy samana kuin solmukaaviossa.

Menetelmä 3.54. (*Seifert*) Seifertin menetelmä koostuu kolmesta vaiheesta. Aluksi suunnatun solmun risteykset oiotaan. Seuraavaksi muodostuneet ympyrät väritetään kahdella värillä, ja lopuksi ympyrät yhdistetään toisiinsa, jolloin saadaan Seifertin pinta.  [30, s. 21]

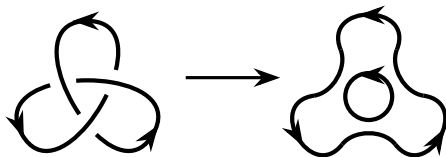
Ensimmäisessä vaiheessa suunnatun solmun jokainen risteys oiotaan kuvan 27 mukaisesti. Lopputuloksena saadaan oiottu kaavio, jonka ympyröitä kutsutaan Seifertin kierroksiksi.



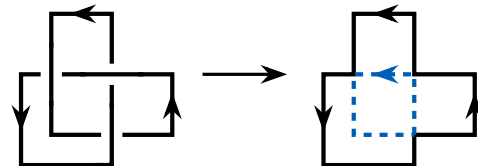
Kuva 27: Jokainen risteys on joko vasemmalle tai oikealle suunnattu. Niistä kumpikin oiotaan samalla tavalla kahdeksi suoraksi.

Esimerkiksi suunnatun apilasolmun oikominen on esitetty kuvassa 28a. Tuloksena on kaksi sisäkkäistä Seifertin kierrosta, jotka ovat tässä tapauksessa molemmat suunnattu positiiviseen kiertosuuntaan.

Oikominen voidaan esittää myös ruutukaaviona, jossa solmua on venytetty niin, että sen jokainen kaari kulkee ruudukon vaaka- tai pystyviivoja pitkin. Tällöin jokainen risteys on ruudukon hilapisteessä. Apilasolmun ruutukaavio näkyy kuvassa 28b, jossa toinen Seifertin kierros on merkitty kiinteällä mustalla värillä ja toinen kierros on piirretty katkonaisella sinisellä kuviolla.



(a) Oikominen tavallisessa muodossa.



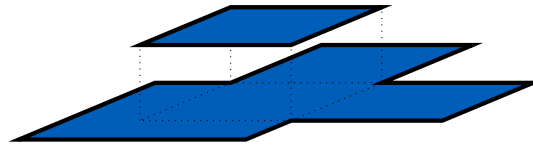
(b) Oikominen ruutukaaviomuodossa.

Kuva 28: Seifertin menetelmän ensimmäinen vaihe apilasolmun tapauksessa.

Ensimmäisen vaiheen lopuksi jokaiselle Seifertin kierrokselle määritellään syvyys. Uloimpien kierrosten syvyys on 0 ja sisempien kierrosten syvyys kuvaa, kuinka monen ympyrän ympäröimä se on. Esimerkiksi kuvan 28 apilasolmun oiottu muodon ulkokierroksen syvyys on 0 ja sisäkierroksen syvyys on 1, koska sen ympärillä on tasan yksi ympyrä.

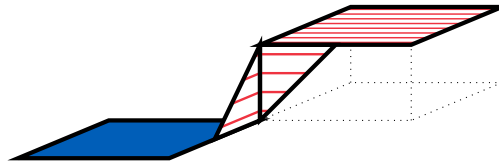
Toisessa vaiheessa jokainen Seifertin kierros väritetään yhdellä kahdesta väristä riippuen siitä, kulkeeko se myötä- vai vastapäivään.

Esimerkiksi apilasolmun kumpikin Seifertin kierros kulkee vastapäivään, jolloin ne väritetään samalla värillä. Vaikka ei ole teoriassa väliä käytetäänkö tavallista oiottua solmu-kaaviota vai ruutukaaviota, niin ruutukaavion piirtäminen ja Seifertin pinnan täsmällinen määrittäminen on tavallista kaaviota yksinkertaisempaa – varsinkin Seifertin menetelmän viimeisessä osassa. Lopputulos on esitetty kolmiulotteisessa kuvassa 29. Huomautuksena sisemmän Seifertin kierroksen syvyys on 1, joten se on piirretty korkeammalle kuin ulompi kierros, jonka syvyys on 0.



Kuva 29: Seifertin menetelmän toinen vaihe apilasolmun tapauksessa.

Kolmannessa vaiheessa jokaiseen risteykseen liittyvät Seifertin kierrokset yhdistetään niin, että kierroksien värit säilyvät. Kun oikominen on tehty ruutukaaviomuodossa, niin yhdistäminen voidaan tehdä säännöllisesti menetelmällä, joka on saatu muuttamalla hiukan teoksen [1, s. 144] liitosta. Esimerkiksi, jos kierrokset olisivat eriväriset, niin ne voitaisiin yhdistää kahdella kuvan 30 mukaisella kolmiolla.



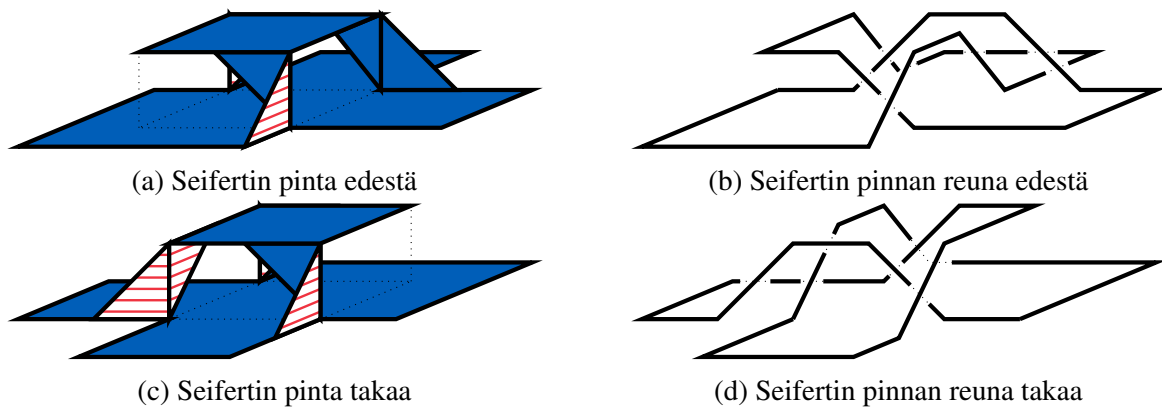
Kuva 30: Kaksi eriväristä Seifertin kierrosta voidaan liittää toisiinsa lisäämällä kaksi kolmiota.

Apilasolmun tapauksessa Seifertin kierrokset voidaan liittää toisiinsa kuvan 31 mukaisesti. Kuvaan on piirretty jokainen kolmesta liitoksesta. Erityisesti kuvien 31b ja 31d Seifertin pinnan reuna on täsmälleen sama kuin kuvan 28b oikomaton ruutukaavio, kun reunaa katsotaan ylhäältä päin.

3.4.3 Alexanderin polynomin määritelmä

Alexanderin polynomin laskemista varten on muodostettava sopiva avaruus. Sen on oltava säännöllinen peiteavaruus ja sen homologiaryhmälle on tarkoitus määritellä modulirakenne.

Solmun ryhmän abelointikuvaus on $Ab: \pi_1(X_K) \rightarrow \mathbb{Z}$, jonka maalijoukkona on alaluvun 3.4.1 mukaisesti kokonaislukujen ryhmä riippumatta solmusta. Koska kuvaus on ryhmähomomorfismi, niin sen ydin $\text{Ker } Ab$ on solmun ryhmän normaali aliryhmä. Siispä sitä vastaa säännöllinen peiteavaruus, jonka peiteryhmä on lauseen 3.34 mukaisesti kokonaislukujen ryhmä. Yleisesti peiteavaruutta, jonka peiteryhmä ovat kokonaisluvut, kutsutaan äärettömäksi sykliseksi peitteeksi.



Kuva 31: Seifertin menetelmän kolmas vaihe tuottaa lopullisen Seifertin pinnan. Vasemmanpuoleisissa kuvissa on apilasolmun Seifertin pinta ja oikeanpuoleisissa kuvissa on sen reuna. Ylemmät ja alemmat kuvat näyttävät saman tilanteen kahdesta eri suunnasta. Pinnan toinen puoli on merkitty kiinteällä sinisellä värillä ja toinen puoli punaraidoin.

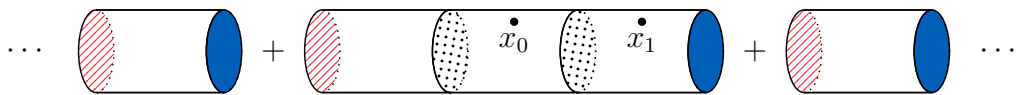
Nimitys 3.55. (*Syklinen peite*) Säännöllinen peiteavaruus on *syklinen*, jos sitä vastaava peiteryhmä on syklinen.  [33, s. 209]

Solmun komplementin sykliset peiteavaruudet voidaan rakentaa Seifertin pinnan avulla. Jos nimittäin avaruudesta S^3 poistetaan solmua vastaava Seifertin pinta, niin muodostuneen avaruuden reuna koostuu kahdesta Seifertin pinnan muotoisesta osasta. Kun tällaisia avaruuksia liitetään toisiinsa äärettömän monta, niin muodostuu solmun komplementin ääretön syklinen peiteavaruus.

Merkintä 3.56. Olkoon X_K solmun K komplementti. Sen ääretöntä syklistä peiteavaruutta merkitään $\bar{X}_K$. Sen peiteryhmän $\mathbb{Z}$ virittäjä on $\varphi: \bar{X}_K \rightarrow \bar{X}_K$. Käytännössä φ siirtää peiteavaruutta yhden pykälän eteenpäin.

Esimerkki 3.57. Epäsolmun Seifertin pinta on yksiulotteinen kiekko B^1 . Kun se poistetaan pallosta S^3 , niin saadaan avaruus $S^3 \setminus B^1$. Käytännössä poistettu kiekko vastaa avaruuden viiltoa. Jotta tilanne voitaisiin piirtää, niin voidaan ajatella, että pallo käännetään ympäri viiltokohdasta niin, että toinen viillon puoli jää vasemmalle ja toinen jää oikealle puolelle kuvan 32 yksittäisien osien mukaisesti. Koska avaruus S^3 vastaa neliulotteisen kuulan pintaa, niin sitä ei voida täysin piirtää vaan se on merkitty täytettynä kolmiulotteisena sylinterinä, jonka valkoiset osat olisivat oikeasti laajemmat.

Ääretön syklinen peiteavaruus saadaan liittämällä avaruuksia $S^3 \setminus B^1$ peräkkäin. Kussakin avaruudessa on kaksi Seifertin pinnan B^1 muotoista viiltokohtaa, joita on merkitty kuvassa 32 sinisellä ja viivoitetulla punaisella värillä. Kunkin avaruuden sininen osa liitetään seuraavan avaruuden punaiseen osaan, jolloin saadaan ääretön jono avaruuksia. Peiteryhmä koostuu peitemuunnoksista, jotka siirtävät avaruutta n pykälää eteenpäin. Tarkemmin sanottuna ne kuvaavat yhtä jonon osaa vastaavan avaruuden pisteet sellaisiksi pisteiksi, jotka ovat vastaavassa kohdassa sitä avaruutta, joka vastaa jonossa n pykälää eri kohdassa olevaa osaa. Esimerkiksi virittäjämuunnos φ kuvaa keskimmäiseksi piirretyn avaruuden pisteen x_0 siitä yhden pykälän oikealla puolella olevan avaruuden pisteeksi x_1 .



Kuva 32: Epäsolmun komplementin ääretön syklinen peiteavaruus muodostuu äärettömästä määrästä samanlaisia osia, joiden reunat vastaavat epäsolmun Seifertin pintaa. Kuvan sylinterin muotoiset osat vastaavat avaruutta $S^3 \setminus B^1$. Kiinteät siniset ja katkoviivaiset punaiset osat vastaavat Seifertin pinnan kahta eri puolta, jotka ovat topologisesti samanmuotoiset. Ne osat, joissa sininen ja punainen reuna on liimattu yhteen, on väritetty mustilla pisteillä.

Solmun komplementin äärettömälle sykliselle peitteelle voidaan lakea kolmiohomologia esimerkiksi soluhomologiaa käyttäen. Tällöin erityisesti ensimmäinen kolmiohomologiaryhmä $H_1(\bar{X}_K)$ on mielenkiintoinen. Koska se on vaihdannainen ryhmä, niin siitä voidaan muodostaa moduli lisäämällä skalaarikertolasku. Laskutoimitukseksi voidaan valita peiteryhmän virittäjän φ indusoiman ketjukuvauksen ensimmäinen komponentti.

Määritelmä 3.58. (Alexanderin moduli) Olkoon $\bar{X}_K$ solmun komplementin ääretön syklinen peite ja olkoon φ^1 sen peiteryhmän virittäjä. Merkitään muitakin peiteryhmän jäseniä muodossa φ^n , jossa yläindeksi tarkoittaa, että kyseinen peitekuvaus siirtää peitettä n pykälää eteenpäin. Peitteen ensimmäinen kolmiohomologiaryhmä on $H_1(\bar{X}_K) := H_1(S_*(\bar{X}_K))$. Koska φ^1 on kuvaus topologiselta avaruudelta itselleen, niin se indusoi ketjukuvauksen $\varphi_\#^1: S_*(\bar{X}_K) \rightarrow S_*(\bar{X}_K)$, jonka lähtö- ja maaliketjut ovat samat. Kuvauksen ensimmäinen kolmiohomologia on määritelmällisesti homomorfismi

$$H_1(\varphi_\#^1): H_1(S_*(\bar{X}_K)) \rightarrow H_1(S_*(\bar{X}_K))$$

$$[a] \rightarrow [\varphi_\#^1(a)].$$

Siispä voidaan määritellä ryhmän $H_1(\bar{X}_K)$ vasen toiminta. Sen identiteettilaskutoimitus on $H_1(\varphi_\#^0)$ ja laskutoimituksien summa ja tulo ovat vastaavasti

$$H_1(\varphi_\#^m) + H_1(\varphi_\#^n) = H_1(\varphi_\#^{m+n}) \quad \text{ja} \quad H_1(\varphi_\#^m) \cdot H_1(\varphi_\#^n) = H_1(\varphi_\#^{m \cdot n}).$$

Ne käyttäytyvät samalla tavalla kuin kokonaislukujen rengas, joten ryhmästä $H_1(\bar{X}_K)$ saadaan $\mathbb{Z}$ -moduli, jota kutsutaan *Alexanderin moduli*ksi.  [30, s. 16]

Alexanderin moduli voidaan äärellisviritteisien ryhmien rakennelauseen mukaan esittää isomorfisesti muodossa $H_1(\bar{X}_K) \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/\langle p_1^{\alpha_1} \rangle \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\langle p_m^{\alpha_m} \rangle$, jonka alkutekijät $p_i^{\alpha_i}$ ovat yksikäsitteiset renkaan yksiköitä lukuun ottamatta. Alexanderin modulin aste on nolla eli se on kiertymämoduli.

Lause 3.59. *Alexanderin moduli on kiertymämoduli.*

 [30, s. 16] $\square$

Alexanderin modulin alkutekijämuotoisesta esityksestä voidaan laskea aste, joka on yksikäsitteinen kerroinrenkaan yksiköillä kertomista lukuun ottamatta. Teknisistä syistä kokonaislukujen rengas halutaan korvata rationaalipolynomien renkaalla, jotta saataisiin polynomimuotoinen solmutunnus. Koska rationaaliluvut muodostavat kunnan, niin rationaalipolynomien rengas on pääideaalialue, jolloin modulin rakennelause on voimassa sillekin.

Muistutus 3.60. (Laurentin polynomi) Olkoon R vaihdannainen rengas ja olkoon $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektori. *Laurentin polynomi* on äärelliskantajainen summa

$$p := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} p_k x^k,$$

jossa $p_k \in R$. Polynomia merkitään $R[x^{\pm 1}] = R[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$.

 [29, s. 3]

Määritelmä 3.61. (*Alexanderin polynomi*) Olkoon $H_1(\bar{X}_K)$ Alexanderin moduli, jonka kerroinrenkaaksi on laajennettu rationaalipolynomien rengas $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$. Modulin esityksen tekijät ovat muotoa $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]/\langle p_i^{\alpha_i} \rangle$, jossa p_i ovat alkupolynomeja. Alexanderin modulin astetta $\text{ord } H_1(\bar{X}_K) := \prod_{i=0}^m p_i^{\alpha_i}$ kutsutaan *Alexanderin polynomiksi* ja sitä merkitään $\Delta_K(t)$. Se on yksiselitteinen lukuun ottamatta kertomista renkaan $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ yksiköillä, jotka ovat muotoa ax^n olevia polynomeja, joiden kertoimet ovat rationaalilukuja $a \in \mathbb{Q}$.  [30, s. 16]

4 Hovanovin homologia

4.1 Jonesin polynomi

Hovanovin homologiaa voidaan pitää tietyllä tavalla tulkitun Jonesin polynomin laajenuksena. Jones itse määritteli polynominsa käyttäen von Neumanin algebroja, joita hän sovelsi moninaruisiin punoksiin[16]. Mutta alkuperäisen lähestymistavan sijaan on tarkoituksenmukaisempaa määritellä polynomi Kauffmanin sulkeiden avulla, joita käsitellään alaluvussa 4.1.1. Niiden avulla saadaan muodostettua vaillinainen solmutunnus, joka toimii Reidemeisterin II- ja III-siirroissa, mutta joka ei säily I-siirrossa. Alaluvussa 4.1.2 puute korjataan teknisellä lisäyksellä, jolloin saadaan toimiva solmutunnus, Jonesin polynomi. Viimeisen alaluvun 4.1.3 tarkoituksena on kirjoittaa Jonesin polynomi sellaisessa muodossa, joka on mahdollisimman lähellä Hovanovin homologian muotoilua ja siten tarjota luonnollinen perusta sen määritelmää varten.

4.1.1 Kauffmanin sulkeet

Kauffmanin sulkeiden ideana on liittää jokaiseen solmukaavioon Laurentin polynomi rekursiivisesti niin, että kussakin vaiheessa kaavion risteysten määrä vähenee yhdellä. Kun kaavion jokainen risteys on poistettu, jää jäljelle ainoastaan joukko erillisiä ympyröitä. Siispä on määritettävä kaksi yhtälöä.

Ensimmäinen yhtälö, joka vastaa risteysten vähentämistä, on

$$\langle \times \rangle = A^{-1} \langle \bowtie \rangle + A \langle \rangle \langle \rangle .$$

Käytännössä solmukaavio D jakautuu kahdeksi uudeksi kaavioksi, jossa ensimmäisessä risteys $\times$ on suoristettu kahdeksi vaakasuuntaiseksi kaareksi $\bowtie$ ja toisessa kahdeksi pystysuuntaiseksi kaareksi $\rangle \langle$. Näille uusille kaavioille määritellään muodolliset kertoimet A^{-1} ja A . Kertoimet voisivat lähtökohtaisesti olla mitkä tahansa, mutta yleensä ne valitaan toistensa käänteisluvuiksi, jotta ne kumoutuisivat Reidemeisterin II- ja III-tyyppien siirroissa.

Toinen yhtälö vastaa ympyrän poistamista, ja se on muodollisesti

$$\langle L \sqcup \bigcirc \rangle = B \langle L \rangle ,$$

jossa L on mikä tahansa solmukko. Myöhemmin esitettävässä lauseessa 4.2 huomataan, että kertoimen B on vastattava arvoa $-A^2 - A^{-2}$, jotta Kauffmanin sulkeet säilyisivät Reidemeisterin II-tyypin siirrossa.

Näin ollen saadaan Laurentin polynomi $R[A^{\pm 1}, B]$. Kun B esitetään kertoimen A avulla ja kerroinrenkaaksi valitaan kokonaisluvut, niin saadaan lopulta Kauffmanin sulkeet. Siinä tyhjälle solmulle on kiinnitetty vakioarvo $\langle \emptyset \rangle = 1$ polynomin laskemisen helpottamiseksi.

Määritelmä 4.1. (Kauffmanin sulkeet) Olkoon $\mathcal{D}$ kaikkien solmukaavioiden joukko. Kuvausta $\langle \cdot \rangle : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ kutsutaan *Kauffmanin sulkeiksi*, jos

1. $\langle \times \rangle = A^{-1} \langle \bowtie \rangle + A \langle \rangle \langle \rangle$,
2. $\langle L \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$ ja

3. $\langle \emptyset \rangle = 1$,

missä L on mielivaltainen solmukko.

 [30, s. 6–8]

Osoitetaan, että Kauffmanin sulkeiden arvo säilyy Reidemeisterin II- ja III-siirroissa.

Lause 4.2. *Kauffmanin sulkeet säilyvät Reidemeisterin siirrossa II.*

 [30, s. 8]

Todistus. Aloitetaan tyyppin Iia Reidemeisterin siirron tutkimisella. Kun ylempi risteys avataan ensimmäisen yhtälön avulla, saadaan

$$\langle \overline{\text{Ii}} \rangle = A^{-1} \langle \text{U} \rangle + A \langle \overline{\text{R}} \rangle. \quad (23)$$

Jatketaan avaamalla alemmat risteukset kummastakin uudesta kaaviosta. Ensimmäisestä tulee

$$\langle \text{U} \rangle = A^{-1} \langle \text{U} \rangle + A \langle \text{I} \rangle \quad \langle \text{I} \rangle = A^{-1} \langle \text{II} \rangle + A \langle \text{II} \rangle, \quad (24)$$

jonka viimeisessä välivaiheessa oiottiin mutkittelevat viivat suoriksi. Vastaavasti toinen kaavio on

$$\langle \overline{\text{R}} \rangle = A^{-1} \langle \overline{\text{R}} \rangle + A \langle \overline{\text{N}} \rangle.$$

Kauffmanin toisen yhtälön perusteella ympyrä voidaan poistaa lisäämällä kerroin. Merkitään tässä vaiheessa kerrointa kirjaimella $B = -A^2 - A^{-2}$, jolloin

$$\langle \overline{\text{R}} \rangle = A^{-1} B \langle \text{II} \rangle + A \langle \overline{\text{N}} \rangle = (A^{-1} B + A) \langle \text{II} \rangle. \quad (25)$$

Kun yhtälöt (24) ja (25) sijoitetaan yhtälöön (23), saadaan

$$\langle \overline{\text{Ii}} \rangle = A^{-1} (A^{-1} \langle \text{II} \rangle + A \langle \text{II} \rangle) + A(A^{-1} B + A) \langle \text{II} \rangle.$$

Siispä yhdistämällä kertoimet huomataan, että

$$\langle \overline{\text{Ii}} \rangle = \langle \text{II} \rangle + (A^{-2} + B + A^2) \langle \text{II} \rangle.$$

Vaakasuuntaisista suorista päästään eroon ainoastaan, kun $B = -A^2 - A^{-2}$. Näin ollen sen lisäksi, että Kauffmanin sulkeet toteuttavat Reidemeisterin Iia-siirron, niin Kauffmanin toisen yhtälön kerroin ei voi olla mikään muu. Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että

$$\langle \overline{\text{Ii}} \rangle = \langle \text{II} \rangle + (A^{-2} + B + A^2) \langle \text{II} \rangle,$$

jolloin myös Reidemeisterin Iib-siirto säilyttää Kauffmanin sulkeet. □

Lause 4.3. *Kauffmanin sulkeet säilyvät Reidemeisterin siirrossa III.*

 [30, s. 8]

Todistus. Avataan alin risteys Reidemeisterin IIIa-siirrosta, jolloin saadaan

$$\langle \overline{\text{X}} \rangle = A^{-1} \langle \overline{\text{U}} \rangle + A \langle \overline{\text{II}} \rangle.$$

Muokataan näin syntyneitä uusia kaavioita hieman. Koska Kauffmanin sulkeet säilyvät Reidemeisterin II-siirrossa, niin ensimmäisen kaavion vaakaviiva voidaan liu'uttaa keskele. Toisessa kaaviossa voidaan myös liu'uttaa vaakaviivaa, koska kuvion rakenne säilyy samanlaisena. Näin ollen päädytään yhtälöön

$$\left\langle \overline{\text{X}} \right\rangle = A^{-1} \left\langle \text{---} \right\rangle + A \left\langle \text{||} \right\rangle.$$

Tästä voidaan edelleen jatkaa keskimmäisen vaakaviivan liikuttamista Reidemeisterin II-siirrolla niin, että se menee alimman osan päälle. Siispä

$$\left\langle \overline{\text{X}} \right\rangle = A^{-1} \left\langle \text{---} \right\rangle + A \left\langle \text{||} \right\rangle = \left\langle \overline{\text{X}} \right\rangle.$$

Täten Kauffmanin sulkeet säilyvät Reidemeisterin IIIa-siirrossa. Sama todistus toimii IIIb-siirrolle, mutta välivaiheiden A - ja A^{-1} -termit vaihtavat paikkoja. $\square$

Kauffmanin sulkeet eivät kuitenkaan säily ensimmäisessä Reidemeisterin siirrossa. Sitä vastoin, kun solmun polvi – eli lenkkimäinen osa – suoristetaan, niin sulkeiden eteen tulee vakiokerroin.

Lause 4.4. *Reidemeisterin Ia-siirron oikea puoli eroaa vasemmasta puolesta kertoimella $-A^{-3}$, kun sen risteys suoristetaan. Vastaavasti Ib-siirrossa ero on $-A^3$.*  [30, s. 9]

Todistus. Lasketaan sulkeiden arvo vaihe vaiheelta. Tyypin Ia siirrossa sulkeet ovat Kauffmanin ensimmäisen yhtälön perusteella

$$\left\langle \text{P} \right\rangle = A^{-1} \left\langle \text{) o} \right\rangle + A \left\langle \text{S} \right\rangle.$$

Ensimmäinen kahdesta muodostuneesta kaaviosta koostuu suorasta ja ympyrästä ja jälkimmäisessä on ainoastaan yksi suora. Tehdään muutokset, jolloin saadaan

$$\left\langle \text{P} \right\rangle = A^{-1} \left\langle \text{| o} \right\rangle + A \left\langle \text{|} \right\rangle.$$

Käytetään Kauffmanin toista yhtälöä ympyrän poistamiseen, jolloin

$$\left\langle \text{P} \right\rangle = A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) \left\langle \text{|} \right\rangle + A \left\langle \text{|} \right\rangle.$$

Kun kertoimet yhdistetään, saadaan lopuksi

$$\left\langle \text{P} \right\rangle = -A^{-3} \left\langle \text{|} \right\rangle.$$

Vastaavasti tyypin Ib siirrolle pätee

$$\left\langle \text{P} \right\rangle = A^{-1} \left\langle \text{S} \right\rangle + A \left\langle \text{) o} \right\rangle = -A^3 \left\langle \text{|} \right\rangle.$$

Siispä Ia- ja Ib-siirtojen kertoimet ovat $-A^{-3}$ ja $-A^3$ vastaavasti. $\square$

4.1.2 Jonesin polynomin määritelmä

Kauffmanin sulkeiden puute voidaan paikata kertomalla se solmusta riippuvalla termillä, jolloin saadaan pienien sievennyksien jälkeen Jonesin polynomi. Paikkauksen ajatuksena on etsiä toinen vaillinainen solmutunnus, joka säilyy Reidemeisterin II- ja III-siirroissa, mutta joka muuttuu I-siirrossa. Kun se yhdistetään Kauffmanin sulkeisiin sopivasti, niin I-siirtojen vaikutus saadaan kumottua.

Toimivaksi vaillinaiseksi solmutunnukseksi osoittautuu *vyyhde*, joka mittaa, kuinka paljon solmukaaviossa on eri suuntiin kulkevia risteysksiä. Jotta suunta voidaan määrittää, on solmujen kaarien suhteelliset suunnat huomioitava.

Merkintä 4.5. (*Risteyksen suunta*) Olkoon D solmukaavio. Sen jokainen risteys vastaa kuvan 33 jompaakumpaa vaihtoehtoa. Ensimmäistä tilannetta, jossa vasemmalle kulkeva kaari ylittää oikealle kulkevan kaaren sanotaan *vasemmaksi risteykseksi* ja vastaavasti toista tapausta, jossa oikealle kulkeva kaari ylittää vasemmalle menevän kaaren sanotaan *oikeaksi risteykseksi*. Kaavion D kaikkien vasenten risteysten määrää merkitään $[\nearrow](D)$ ja oikeiden risteysten määrää $[\searrow](D)$. [30, s. 9]



Kuva 33: Risteyksen suunta voi olla joko vasen tai oikea.

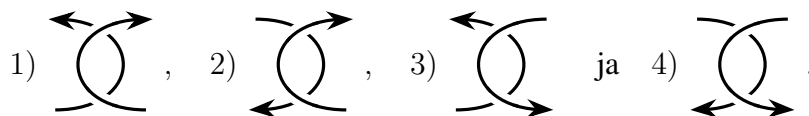
Määritelmä 4.6. (*Vyyhde*) Olkoon D solmukaavio. Sen *vyyhde* $v(D)$ on

$$v(D) = [\searrow](D) - [\nearrow](D).$$

Joissain lähteissä vyyhteen etumerkki on päinvastainen. [30, s. 9]

Lause 4.7. *Vyyhde säilyy Reidemeisterin II- ja III-siirroissa.* [30, s. 9]

Todistuksen idea. Osoitetaan esimerkin vuoksi, että vyyhde säilyy Reidemeisterin II-siirrossa. Kaikki neljä mahdollista tapausta ovat

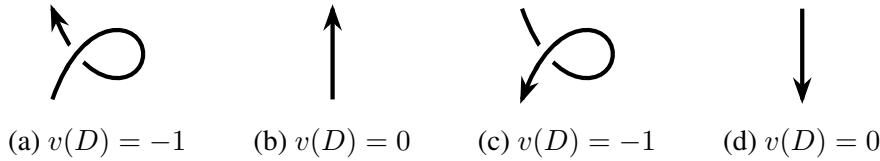


Niissä jokaisessa on yksi vasen ja yksi oikea risteys, jolloin vyyhde on niissä kaikissa 0. Koska IIa-siirron toisella puolella ei ole risteysksiä lainkaan, niin senkin vyyhde on 0. Näin ollen vyyhde säilyy siirrossa IIa. Muut Reidemeisterin siirrot voidaan tutkia samalla tavalla. □

Lause 4.8. *Kun solmusta poistetaan polvi käyttäen Reidemeisterin tyypin Ia siirtoa, niin vyyhde kasvaa yhdellä. Käytettäessä Ib-siirtoa se pienenee yhdellä. Vastaavasti, kun solmuun lisätään Ia-siirron mukainen polvi, niin vyyhde pienenee yhdellä. Lisättäessä Ib-siirron mukainen polvi vyyhde kasvaa yhdellä.*  [30, s. 9]

Todistus. Kuvaan 34 on laskettu vyyhteen arvo Reidemeisterin Ia-tyypin siirrossa. Riippumatta valitusta kaaren suunnasta, kuvaan muodostuva ainoa risteys on oikea, jolloin vyyhde on -1 . Kun risteys aukaistaan, saadaan suora, jonka vyyhde on 0 . Siispä kummassakin tapauksessa Ia-siirto lisää vyyhteen arvoa yhdellä, kun risteys aukaistaan ja vähentää sitä yhdellä, kun uusi risteys luodaan.

Tutkittaessa Reidemeisterin Ib-siirtoa risteysten suunta on vasen. Siispä Ib-siirto vähentää vyyhteen arvoa yhdellä, kun risteys aukaistaan ja lisää sitä yhdellä, kun uusi risteys luodaan. $\square$



Kuva 34: Vyyhteen arvo kasvaa yhdellä Reidemeisterin Ia-tyypin siirrossa riippumatta kaaren suunnasta.

Lauseen 4.4 mukaisesti Kauffmanin sulkeiden arvo muuttuu kertoimella $-A^{-3}$ Reidemeisterin Ia-siirrossa ja kertoimella $-A^3$ Ib-siirrossa. Vastaavasti lauseen 4.8 mukaan Ia-siirto kasvattaa vyyhdettä yhdellä ja Ib-siirto pienentää sitä yhdellä. Siispä Kauffmanin sulkeiden muutos voidaan kumota kertomalla ne vyyhteestä riippuvalla kertoimella $(-A^3)^{-v(D)}$. Tällöin saadaan solmutunnus, jota sanotaan sieventämättömäksi Jonesin polynomiksi.

Määritelmä 4.9. (*Sieventämätön Jonesin polynomi*) Olkoon D solmukaavio. Määritellään siitä riippuva polynomi

$$\bar{J}(D) := (-A^3)^{-v(D)} \langle D \rangle.$$

Sitä kutsutaan *sieventämättömäksi Jonesin polynomiksi*.  [30, s. 9]

Lause 4.10. *Sieventämätön Jonesin polynomi on solmutunnus.*  [30, s. 10]

Todistus. Lauseiden 4.2 ja 4.3 mukaan Kauffmanin sulkeet säilyvät Reidemeisterin II- ja III-tyyppien siirroissa ja lauseen 4.7 mukaan sama pätee vyyhteelle. Siispä tarvitsee osoittaa enää, että sieventämätön Jonesin polynomi säilyy tyypin I siirrossa.

Olkoot D ja E sellaiset solmukaaviot, että E saadaan Reidemeisterin tyypin Ia siirrolla kaaviosta D . Oletetaan symmetrian vuoksi, että kaaviosta D poistetaan polvi. Tällöin kaavion D sieventämätön Jonesin polynomi on

$$\bar{J}(D) = (-A^3)^{-v(D)} \langle D \rangle. \quad (26)$$

Lauseen 4.4 mukaan $\langle D \rangle = -A^{-3} \langle E \rangle$ ja lauseen 4.8 mukaan $v(D) + 1 = v(E)$. Sijoittamalla ne yhtälöön (26), saadaan

$$\bar{J}(D) = (-A^3)^{-v(D)} \cdot (-A^{-3}) \langle E \rangle = (-A^3)^{-v(D)-1} \langle E \rangle = (-A^3)^{-v(E)} \langle E \rangle = \bar{J}(E).$$

Näin ollen sieventämätön Jonesin polynomi säilyy Reidemeisterin Ia-tyyppin siirrossa. Koska vastaavalla todistuksella saataisiin osoitettua, että sama pätee Ib-tyyppin siirrolle, niin sieventämätön Jonesin polynomi on solmutunnus. $\square$

Esimerkki 4.11. Lasketaan sieventämätön Jonesin polynomi Hopfin solmukolle H , jonka osat on suunnattu positiiviseen kiertosuuntaan kaavion (27) mukaisesti.



Solmukossa on kaksi oikeaa risteystä ja ei yhtään vasenta risteystä, jolloin vyyhde on

$$v(H) = [\nearrow] (H) - [\searrow] (H) = 0 - 2 = -2.$$

Täten sen sieventämätön Jonesin polynomi on

$$\bar{J}(H) = A^6 \langle H \rangle. \quad (28)$$

Lasketaan Kauffmanin sulkeet suoristamalla ensin ylempi risteys, jolloin saadaan

$$\langle H \rangle = \langle \bigcirc \bigcirc \rangle = A^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A \langle \bigcirc \bigcirc \rangle.$$

Jatketaan poistamalla alemmat risteykset. Tällöin

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle &= A^{-1} \left(A^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A \langle \bigcirc \bigcirc \rangle \right) \\ &\quad + A \left(A^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A \langle \bigcirc \bigcirc \rangle \right). \end{aligned}$$

Poistetaan nyt erilliset ympyrät käyttäen lyhennysmerkintää $B = -A^2 - A^{-2}$. Tällöin

$$\langle H \rangle = A^{-1} (A^{-1} B^2 + AB) + A (A^{-1} B + AB^2) = A^{-2} B^2 + 2B + A^2 B^2$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (28) ja otetaan yhteiseksi tekijäksi B , jolloin saadaan

$$\bar{J}(H) = A^4 B^2 + 2A^6 B + A^8 B^2 = B(A^4 B + 2A^6 + A^8 B).$$

Sijoitetaan viimeiseksi $B = -A^2 - A^{-2}$, jolloin

$$\begin{aligned} \bar{J}(H) &= (-A^2 - A^{-2})(A^4(-A^2 - A^{-2}) + 2A^6 + A^8(-A^2 - A^{-2})) \\ &= (-A^2 - A^{-2})(-A^6 - A^2 + 2A^6 - A^{10} - A^6) \\ &= (-A^2 - A^{-2})(-A^2 - A^{10}). \end{aligned} \quad (29)$$

Tässä sulut on jätetty tarkoituksella sieventämättä.

Esimerkistä voidaan havaita, että kun minkä tahansa epätyhjän solmun risteykset aukaistaan, niin lopulta päädytään tilanteeseen, jossa on jäljellä vähintään yksi ympyrä. Tämän vuoksi on luonnollista jakaa sieventämättömän Jonesin polynomin arvo kertoimella $B = -A^2 - A^{-2}$, joka voidaan kirjoittaa yhtäpitävässä muodossa $\bar{J}(\bigcirc) = B \langle \emptyset \rangle = B$, koska ympyrän vyyhde on nolla. Tällöin saadaan sievennetty Jonesin polynomi.

Määritelmä 4.12. (*Sievennetty Jonesin polynomi*) Olkoon K solmukko. Sen *sievennetty Jonesin polynomi* on $J(K) := \bar{J}(K)/\bar{J}(\bigcirc)$.  [30, s. 10]

Esimerkki 4.13. Edellisen esimerkin 4.11 mukaisen Hopfin solmukon H sievennetty Jonesin polynomi on

$$J(H) = \bar{J}(H)/\bar{J}(\bigcirc) = \bar{J}(H)/B.$$

Sijoitetaan siihen yhtälössä (29) laskettu $\bar{J}(H)$ ja muistetaan, että $B = -A^2 - A^{-2}$, jolloin

$$J(H) = (-A^2 - A^{-2})(-A^2 - A^{10})/(-A^2 - A^{-2}) = -A^2 - A^{10}. \quad (30)$$

Alkuperäisessä Jonesin polynomissa on käytetty hieman eri kerrointa, mutta se voidaan muodostaa sijoituksella $A = t^{1/4}$.

Määritelmä 4.14. (*Jonesin polynomi*) Jonesin polynomi $J(K)$ on sama kuin sieventämätön Jonesin polynomi, jossa kerroin A on korvattu kertoimella $A = t^{1/4}$.  [17]

Huomautus 4.15. Määritelmät vaihtelevat hieman eri lähteissä. Esimerkiksi alkuperäiset kertoimet A ja A^{-1} voisivat olla päinvastaiset, minkä seurauksena muutoskerroin voisi olla esimerkiksi $A = t^{-1/4}$.

Esimerkki 4.16. Esimerkin 4.11 mukaisen Hopfin solmukon H Jonesin polynomi on yhtälön (30) mukaisesti

$$J(H) = -A^2 - A^{10} = -t^{-1/2} - t^{-5/2} = -\frac{1+t^{-2}}{\sqrt{t}}.$$

4.1.3 Oioskuutio

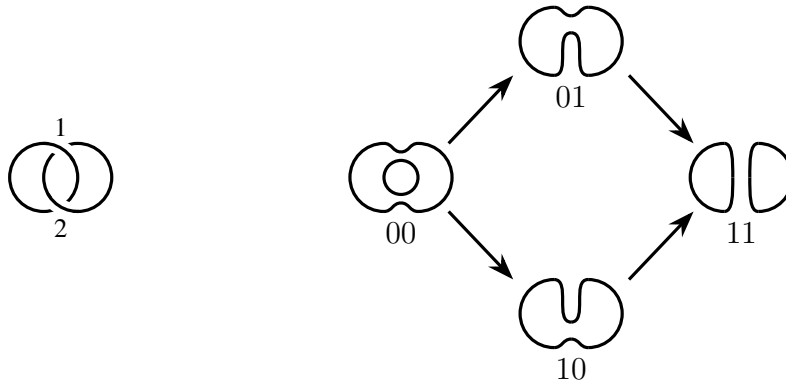
Kauffmanin sulkeiden ja siten Jonesin polynomin laskeminen voidaan käytännössä tehdä oikaisemalla yksi risteys ja jatkamalla jäljelle jääneiden risteysten oikomista syntyneistä uusista Kauffmanin sulkeista. Lopulta päädytään tilanteeseen, jossa risteykset on oikaistu kaikilla mahdollisilla tavoilla. Lisäksi näin saadut kertoimet riippuvat ainoastaan siitä, kuinka monta vaakasuuntaista ja kuinka monta pystysuuntaista oikomista tehtiin. Siksi on luonnollista erotella eri oikaisusuunnat.

Määritelmä 4.17. (*Oios*) Solmun risteys $\times$ voidaan oikaista kahdella tavalla. *Vaakasuuntainen oios* eli 0-oios on $\times \xrightarrow{0} \times$ ja *pystysuuntainen oios* eli 1-oios on $\times \xrightarrow{1} \rangle\langle$. Yleensä oioista käytetään ainoastaan numeroa.  [30, s. 30]

Yksiristeyksisellä solmukolla on kaksi oiottua muotoa, kaksiristeyksisellä neljä ja niin edelleen. Siispä yleisessä tapauksessa n -risteyksisellä solmukolla on 2^n oiottua muotoa. Kun risteykset numeroidaan, kaikki oiottut kaaviot voidaan esittää binäärimuodossa $o_0 o_1 \cdots o_n$, jossa kukin o_i kuvaa sitä vastaavan risteuksen i oikomissuuntaa. Tällöin esimerkiksi $00 \cdots 0$ tarkoittaisi kaaviota, jossa alkuperäisen solmukon jokainen risteys on oikaistu vaakasuuntaisesti. Lisäksi kaikki oiottut kaaviot voidaan esittää luonnollisella tavalla n -ulotteisena kuutiona.

Määritelmä 4.18. (Oioskuutio) Olkoon D solmukaavio, jossa on n numeroitua risteystä. Määritellään n -ulotteinen kuutio $\{0, 1\}^n$. Se on *oioskuutio*, kun sen jokaista nurkkapistettä $o_1 o_2 \cdots o_n$ vastaa kaavion D oiottu muoto.  [4, s. 339]

Esimerkki 4.19. Hopfin solmukossa on kaksi risteystä. Siksi sen oioskuutio on kaksiulotteinen neliö. Sellaisen Hopfin solmukon, jonka ylempi risteys on numeroitu ensimmäiseksi, oioskuutio on esitetty kuvassa 35.



Kuva 35: Hopfin solmukon oioskuutio.

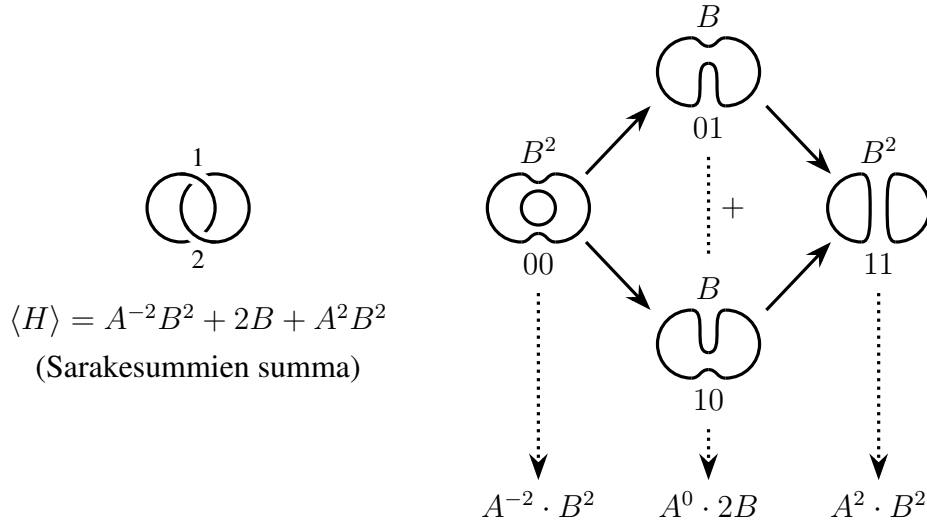
Edellisen esimerkin 4.19 neliö on tarkoituksella piirretty vinoon niin, että pystysuunnassa olevilla oiottuilla kaavioilla on binääriesityksissään täsmälleen yhtä monta ykköstä. Toisin sanoen niissä on keskenään yhtä monta vaaka- ja pystysuuntaista oiosta. Tämän vuoksi oioskuutiosta saadaan helposti laskettua Kauffmanin sulkeiden arvo. Sitä varten jokaisesta oiottusta kaaviosta on laskettava sen sisältämien ympyröiden määrä. Tämän lisäksi jokaiselle sarakkeelle on määrättävä kerroin A^k symmetrisesti niin, että ensimmäisen ja viimeisen sarakkeen kerrointen tulo on 1 ja jokaisen sarakkeen eksponentti k on edellistä saraketta kaksi suurempi.

Esimerkki 4.20. Hopfin solmukon, jonka ylempi risteys on numeroitu ensimmäiseksi, oioskuutio kertoimineen on esitetty kuvassa 36. Oiottujen kaavioiden sisältämien ympyröiden määrä k on ilmaistu tuttuun tapaan muodossa B^k . Kuten kaaviosta käy ilmi, Kauffmanin sulkeet voidaan laskea kolmessa vaiheessa. Ensiksi sarakkeiden kertoimet summataan yhteen, jolloin esimerkiksi keskisarakkeen summaksi tulee $B + B = 2B$. Tämän jälkeen kukin sarake kerrotaan kertoimella A^{-n+2i} , jossa n on risteysten lukumäärä ja i on sarakkeen indeksi eli sen binääriesitysten ykkösten määrä. Lopuksi näin saadut sarakesummat summataan yhteen.

Jonesin polynomi voidaan tämän jälkeen laskea kuten aikaisemminkin eli kertomalla Kauffmanin sulkeet vyyhteestä riippuvalla vakiolla $(-A^3)^{-v(D)}$, sieventämällä yksi B pois, sijoittamalla $B = -A^2 - A^{-2}$ ja lopuksi tekemällä muuttujanvaihto $A = t^{1/4}$.

4.2 Jonesin polynomin kategoriointi

Jonesin polynomi voidaan kategorioida, jolloin saadaan työn päätulos eli Hovanovin homologia. Se on nimetty venäläisen matemaatikon Mihail Gelijevitš Hovanovin mukaan,



Kuva 36: Hopfin solmukon oioskuutiosta voidaan määrittää Kauffmanin sulkeet.

joka keksi sen 1990-luvun lopussa. Hovanovin homologia pohjautuu havaintoon siitä, että oioskuutiosta voidaan palauttaa Jonesin polynomi, mutta niin tehdessä paljon kuution tietoa häviää. Jos sen sijaan oioskuution kärkien oiotut muodot eli 1-monistot yhdistetään toisiinsa $(1 + 1)$ -ulotteisilla pienoilla ja näin muodostettu kokonaisuus kuvataan porrastetuiksi vektoriavaruuksiksi ja niiden välisiksi kuvauksiksi, jotka toteuttavat tietyn Frobeniuksen algebran, niin saadaan solmutunnus, joka on aidosti vahvempi kuin Jonesin polynomi.

Alaluku 4.2.1 käsittelee Jonesin polynomin vakiointia uudelleen, joka tarjoaa alkuperäistä polynomia yksinkertaisemmän asetelman Hovanovin homologian määrittelylle. Toisessa alaluvussa 4.2.2 keskitytään porrastettuihin moduleihin ja siinä osoitetaan, että oioskuution kärkiin voidaan liittää tietty porrastettu vektoriavaruus, jonka porrastetuista ulottuvuuksista voidaan palauttaa Jonesin polynomi. Alaluvussa 4.2.3 oioskuution särmät korvataan $(1 + 1)$ -ulotteisilla pienoilla ja alaluku 4.2.4 näyttää, kuinka ne voidaan kuvata porrastettujen vektoriavaruuksien välisiksi kuvauksiksi, jotka ovat erään Frobeniuksen algebran määrittämiä. Viimeisessä alaluvussa 4.2.5 yhdistetään luvussa käsitellyt asiat ja muodostetaan niistä ketjukompleksi. Siitä voidaan lopulta määrittää Hovanovin homologia.

4.2.1 Uudelleen vakioitu Jonesin polynomi

Hovanov käyttää artikkelissaan [19] vakiintumatonta tapaa ilmaista Kauffmanin sulkeet ja Jonesin polynomi. Muokatun muodon etuna on, että siitä muodostettu Hovanovin homologia voidaan ilmaista yksinkertaisemmin kuin alkuperäisillä Kauffmanin sulkeilla olisi mahdollista. Siksi on syytä esitellä uudelleen vakioidut Kauffmanin sulkeet.

Määritelmä 4.21. (*Uudelleen vakioidut Kauffmanin sulkeet*) Olkoon $\mathcal{D}$ kaikkien solmukaa-
vioiden joukko. Kuvausta $\langle \cdot \rangle_* : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ kutsutaan *Kauffmanin sulkeiksi*, jos

1. $\langle \text{X} \rangle_* = \langle \text{Y} \rangle_* - q \langle \text{Z} \rangle_*$,
2. $\langle L \sqcup \bigcirc \rangle_* = (q + q^{-1}) \langle L \rangle_*$ ja

$$3. \langle \emptyset \rangle_* = 1,$$

missä L on mielivaltainen solmukko.

 [19, s. 8]

Uudelleen vakioitunut Kauffmanin sulkeet ovat melkein samat kuin määritelmän 4.1 sulkeet, kun tehdään sijoitus $q = -A^{-2}$. Kuitenkin, koska ensimmäisen yhtälön kerrointen tulo ei ole tässä tapauksessa 1, niin uudet sulkeet eivät säily Reidemeisterin siirroissa. Tämä voidaan korjata kertoimella $(-1)^{[\text{X}]} q^{[\text{X}]-2[\text{X}]}$.

Määritelmä 4.22. (*Uudelleen vakioitu Jonesin polynomi*) Olkoon D solmukaavio. Määritellään siitä riippuva polynomi

$$\bar{K}(D) := (-1)^{[\text{X}](D)} q^{[\text{X}](D)-2[\text{X}](D)} \langle D \rangle_*.$$

Sitä kutsutaan *sieventämättömäksi Jonesin polynomiksi*. Kun se jaetaan kertoimella $(q + q^{-1})$, niin saadaan

$$K(D) := \bar{K}(D) / (q + q^{-1}).$$

Se on *sievennetty Jonesin polynomi*.

 [19, s. 9]

Lause 4.23. *Kun uudelleen vakioituun Jonesin polynomiin $K(D)$ tehdään sijoitus $-q = \sqrt{t}$, niin saadaan alkuperäinen Jonesin polynomi.*

Todistus. Osoitetaan induktiolla, että väite pätee kaikille solmukoille. Se pätee selvästi tyhjälle solmulle $\emptyset$ ja ympyrälle $\bigcirc$, jotka toimivat induktion perusaskelina. Koska vielä ei ole todistettu, että K säilyy Reidemeisterin siirroissa, niin tutkitaan myös samojen solmukoiden eri kaavioita.

Oletetaan, että väite pätee kaikille solmukaavioille, joissa on enintään n risteystä ja osoitetaan, että se pätee myös $(n+1)$ -risteyksiselle solmukaavioille D . Olkoon $r = \text{X}$ sen eräs risteys. Nyt on tutkittava kahta tapausta riippuen, onko r vasen vai oikea risteys. Merkitään solmukaaviota, josta on poistettu risteys r , muodossa $D_r := D \setminus \text{X}$.

Jos r on oikea risteys, niin

$$\begin{aligned} K(D) &= (-1)^{[\text{X}](D)} q^{[\text{X}](D)-2[\text{X}](D)} \langle D \rangle_* / (q + q^{-1}) \\ &= (-1)^{[\text{X}](D)} q^{[\text{X}](D)-2[\text{X}](D)} (\langle D_r \cup \text{X} \rangle_* - q \langle D_r \cup \rangle \langle \rangle_*) / (q + q^{-1}). \end{aligned} \quad (31)$$

Induktio-oletuksen perusteella

$$\begin{aligned} J(D_r \cup \text{X}) &= K(D_r \cup \text{X}) = (-1)^{[\text{X}](D)} q^{[\text{X}](D)-1-2[\text{X}](D)} \langle D_r \cup \text{X} \rangle_* / (q + q^{-1}) \text{ ja} \\ J(D_r \cup \rangle \langle) &= K(D_r \cup \rangle \langle) = (-1)^{[\text{X}](D)} q^{[\text{X}](D)-1-2[\text{X}](D)} \langle D_r \cup \rangle \langle \rangle_* / (q + q^{-1}). \end{aligned}$$

Huomautuksena yhtälöiden eksponenteissa on termi -1 , koska oikea risteys poistettiin. Kertoimet ovat termiä q vaille samat kuin yhtälössä (31). Siispä ne lähes kumoavat toisensa, ja saadaan

$$K(D) = q(J(D_r \cup \text{X}) - qJ(D_r \cup \rangle \langle)) = qJ(D_r \cup \text{X}) - q^2J(D_r \cup \rangle \langle).$$

Sijoitetaan $q = -\sqrt{t}$, jolloin

$$K(D) = -\sqrt{t}J(D_r \cup \times) - tJ(D_r \cup \rangle \langle). \quad (32)$$

Mutta sieventämättömälle Jonesin polynomille pätee

$$\begin{aligned} \bar{J}(D) &:= (-A^3)^{-v(D)} \langle D \rangle = (-A^3)^{[\times](D)-[\rangle](D)} \langle D \rangle \\ &= (-A^3)^{[\times](D)-[\rangle](D)} (A^{-1} \langle D_r \cup \times \rangle + A \langle D_r \cup \rangle \langle \rangle). \end{aligned} \quad (33)$$

Koska poistettu risteys r on oikeanpuoleinen, niin edellä muodostuneita kaavioita vastaavat sieventämättömät Jonesin polynomit ovat

$$\begin{aligned} \bar{J}(D_r \cup \times) &= (-A^3)^{[\times](D)-1-[\rangle](D)} \langle D_r \cup \times \rangle \quad \text{ja} \\ \bar{J}(D_r \cup \rangle \langle) &= (-A^3)^{[\times](D)-1-[\rangle](D)} \langle D_r \cup \rangle \langle \rangle. \end{aligned}$$

Kun ne sijoitetaan yhtälöön (33), niin saadaan

$$\begin{aligned} \bar{J}(D) &= -A^3 (A^{-1} \bar{J}(D_r \cup \times) + A \bar{J}(D_r \cup \rangle \langle)) \\ &= -A^2 \bar{J}(D_r \cup \times) - A^4 \bar{J}(D_r \cup \rangle \langle). \end{aligned}$$

Jaetaan yhtälön molemmat puolet epäsolmun sieventämättömällä Jonesin polynomilla, jolloin saadaan määritelmällisesti sievennetyt Jonesin polynomit

$$J(D) = -A^2 J(D_r \cup \times) - A^4 J(D_r \cup \rangle \langle).$$

Tehdään vielä lopuksi sijoitus $A = t^{1/4}$, jolloin

$$J(D) = -\sqrt{t}J(D_r \cup \times) - tJ(D_r \cup \rangle \langle).$$

Tulos on täsmälleen sama kuin yhtälössä (32), joten $J(D) = K(D)$.

Vastaavasti vasemmalle risteykselle r pätee uudelleen vakioituna

$$\begin{aligned} K(D) &= -q^{-2} (J(D_r \cup \times) - qJ(D_r \cup \rangle \langle)) \\ &= -t^{-1} J(D_r \cup \times) - t^{-1/2} J(D_r \cup \rangle \langle). \end{aligned}$$

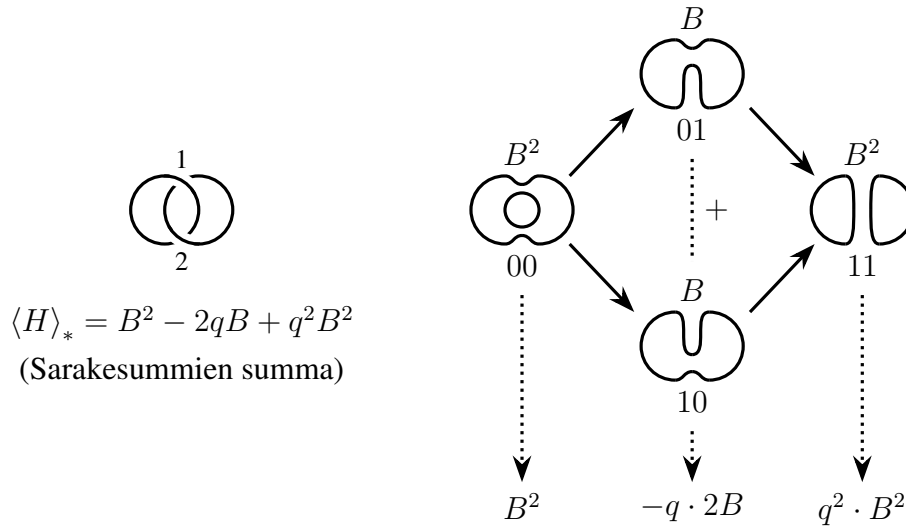
Tavanomaisella tavalla laskettuna Jonesin polynomi olisi

$$\begin{aligned} J(D) &= -A^{-3} (A^{-1} J(D_r \cup \times) + A J(D_r \cup \rangle \langle)) \\ &= -t^{-1} J(D_r \cup \times) - t^{-1/2} J(D_r \cup \rangle \langle). \end{aligned}$$

Tässäkin tapauksessa tulokset ovat samat. Siispä uudelleenvakioitu Jonesin polynomi on sama kuin Jonesin polynomi sijoituksella $-q = \sqrt{t}$. Erityisesti se säilyy Reidemeisterin kaikissa siirroissa. $\square$

Oioskuutioissa voidaan käyttää uudelleen vakioituja Kauffmanin sulkeita vastaavia kertoimia. Niistä voidaan palauttaa uudelleen vakioitu Jonesin polynomi ja edelleen alkuperäinen Jonesin polynomi. Näin muodostettava oioskuutio tarjoaa rungon Hovanovin homologialle.

Esimerkki 4.24. Kuvan 36 tilanteeseen pohjautuva uudelleen vakioitu oioskuutio on esitetty kuvassa 37.



Kuva 37: Hopfin solmukolle voidaan muodostaa oioskuutio, jonka kertoimet vastaavat Hovanovin vakiointia. Tässä on merkitty $B = q + q^{-1}$.

4.2.2 Porrastettu moduli

Kategorioinnin ensimmäisessä vaiheessa oioskuutien kertoimet on korvattava olioilla, joista ne voidaan palauttaa. Eräs toimiva valinta ovat porrastetut vektoriavaruudet, joiden ulottuvuudet vastaavat haluttuja kertoimia. Tällöin esimerkiksi kerroin B , joka on muuttujan q avulla kirjoitettuna $B = q + q^{-1}$, voidaan korvata tietyllä avaruudella V , jonka porrastettu ulottuvuus on $q + q^{-1}$.

Käytännössä avaruuden porrastus tarkoittaa sen jakamista yhteenlaskun suhteen suljetuihin aliavaruuksiin, joista kukin muodostaa yhden portaan. Avaruuden tyypistä riippuen sen portaille voidaan asettaa lisäominaisuuksia kuten kertolasku.

Määritelmä 4.25. (*Porrastettu vaihdannainen ryhmä*) Olkoon $(K, +)$ vaihdannainen monoidi. Vaihdannaista ryhmää G kutsutaan K -*porrastetuksi*, jos se voidaan esittää suorana summana $G = \bigoplus_{k \in K} G_k$.  [5, s. 124]

Nimitys 4.26. (*Porras*) Porrastetun vaihdannaisen ryhmän $G = \bigoplus_{k \in K} G_k$ aliryhmä G_k on sen k -*porras*.  [5, s. 124]

Esimerkki 4.27. Mikä tahansa vaihdannainen ryhmä G voidaan $\mathbb{N}$ -porrastaa triviaalisti niin, että sen 0-porras on G ja muut portaat ovat nollaryhmiä.

Määritelmä 4.28. (*Porrastettu rengas*) Olkoon $(K, +)$ vaihdannainen monoidi. Olkoon R rengas, joka voidaan esittää suorana summana $R = \bigoplus_{k \in K} R_k$, jonka tekijät R_k ovat sen yhteenlaskuryhmän aliryhmiä. Jos lisäksi $R_j R_k \subset R_{j+k}$ kaikilla $j, k \in K$, niin rengas R on K -*porrastettu*.  [22, s. 6]

Määritelmä 4.29. (*Porrastettu moduli*) Kun R on K -porrastettu rengas ja M on R -moduli, jolle $M = \bigoplus_{k \in K} M_k$ ja $R_j M_k \subset M_{j+k}$ kaikilla $j, k \in K$, niin modulia M kutsutaan K -*porrastetuksi*.  [22, s. 6]

Nimitys 4.30. Kun porrastusmonoidina on $\mathbb{Z}$, niin se jätetään usein merkitsemättä ja puhutaan $\mathbb{Z}$ -porrastuksen sijaan vain porrastuksesta. Vastaavasti, kun monoidi on $\mathbb{Z}^n$, niin voidaan puhua n -kertaisesta porrastuksesta.

Esimerkki 4.31. Polynomirengas $R[x]$ voidaan porrastaa niin, että sen k -portaina $R[x]_k$ ovat muotoa ax^k olevat termit, joissa $a \in R$ ja $k \geq 0$. Portaavat ovat selvästi suljettuja yhteenlaskun suhteen ja niiden suorana summana ovat kaikki polynomit $a_0x^0 + \dots + a_kx^k$. Kun $k < 0$, niin portaavat määritellään nollaportaiksi. Lisäksi epänegatiivisten portaiden $R[x]_j$ ja $R[x]_k$ tulo on $R[x]_j R[x]_k = R[x]_{j+k}$ eli se sisältyy portaaseen $R[x]_{j+k}$. Jos toinen portaista on negatiivinen, niin $R[x]_j R[x]_k = 0 \subset R[x]_{j+k}$.

Jos porrastettu rakenne G koostuu portaista, joille voidaan määritellä tavanomainen ulottuvuus, niin koko rakenteelle voidaan määritellä kerroinmonoidista riippuva porrastettu ulottuvuus. Hovanovin homologian kannalta riittää kuitenkin rajoittua tapaukseen, jossa G on vektoriavaruus, joka on $\mathbb{Z}$ - tai $\mathbb{Z}^n$ -porrastettu. Lisäksi riittää, että G on määritelmän 4.25 mukainen porrastettu ryhmä eli sillä ei tarvitse olla porrastetun renkaan ominaisuuksia.

Määritelmä 4.32. (*Porrastettu ulottuvuus*) Olkoon G porrastettu vektoriavaruus, jonka portaavat ovat äärellisulotteisia. Sen *porrastettu ulottuvuus* on

$$q\dim(G) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^k \dim G_k,$$

jossa q on muodollinen kerroin. Yleisemmin $\mathbb{Z}^n$ -porrastetun vektoriavaruuden H porrastettu ulottuvuus on

$$q\dim(H) := \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} q_1^{k_1} \cdots q_n^{k_n} \dim H_{(k_1, \dots, k_n)},$$

jonka muodolliset kertoimet ovat $q_1, \dots, q_n$.

 [6, s. 586]

Palataan oioskuution tarkastelemiseen. Kauffmanin sulkeiden ja Jonesin polynomin kerroin B , joka vastaa oiotun kaavion yhtä ympyrää, oli

$$B = -A^2 - A^{-2} = q + q^{-1}.$$

Määritellään porrastettu vektoriavaruus $V = \langle v_{-1}, v_1 \rangle$, joka voidaan esittää sen kahden portaatan suorana summana $V = \langle v_{-1} \rangle \oplus \langle v_1 \rangle = V_{-1} \oplus V_1$. Koska kumpikin porras on yksiulotteinen, niin avaruuden V porrastettu ulottuvuus on

$$q\dim(V) = q^{-1} \dim(V_{-1}) + q \dim(V_1) = q + q^{-1}.$$

Tilanteessa, jossa oiotussa kaaviossa on useampi ympyrä, kerroin B^n voidaan korvata porrastetun avaruuden V tensoritulolla $V^{\otimes n}$.

Määritelmä 4.33. (*Porrastettu tensoritulo*) Kun G ja H ovat $\mathbb{Z}^n$ -porrastettuja äärellisportaisia vektoriavaruuksia, niin niiden *tensoritulo* on

$$G \otimes H = \bigoplus_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n} \left(\bigoplus_{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n} G_{(b_1, \dots, b_n)} \otimes H_{(a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)} \right).$$

Erityisesti, jos G ja H ovat $\mathbb{Z}$ -porrastettuja, niin

$$G \otimes H = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{b \in \mathbb{Z}} G_b \otimes H_{a-b} \right).$$

Toisin sanoen se on suora summa kaikkien portaiden tensoritermeistä. Lisäksi vasemmanpuoleinen summausindeksi määritellään tensoritulon porrastukseksi.  [6, s. 591]

Avaruuden $V^{\otimes 2}$ tensoritulo on auki kirjoitettuna

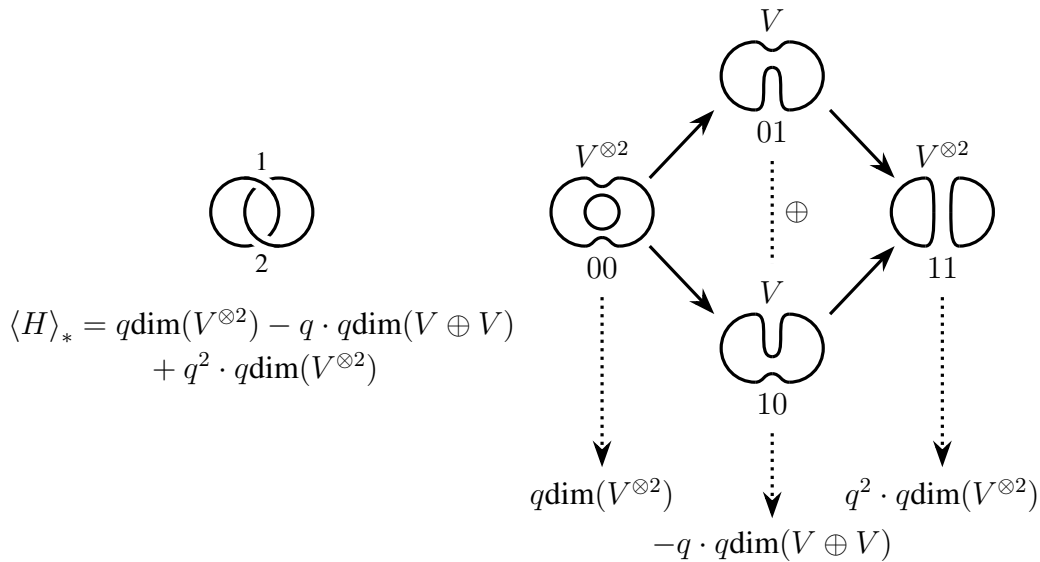
$$V^{\otimes 2} = (V_{-1} \otimes V_{-1}) \oplus (V_{-1} \otimes V_1 \oplus V_1 \otimes V_{-1}) \oplus (V_1 \otimes V_1).$$

Sen portaat ja niiden asteet ovat

$$\begin{aligned} V_{-2}^{\otimes 2} &= V_{-1} \otimes V_{-1}, & \dim(V_{-2}^{\otimes 2}) &= 1, \\ V_0^{\otimes 2} &= V_{-1} \otimes V_1 \oplus V_1 \otimes V_{-1}, & \dim(V_0^{\otimes 2}) &= 2 \quad \text{ja} \\ V_2^{\otimes 2} &= V_1 \otimes V_1, & \dim(V_2^{\otimes 2}) &= 1. \end{aligned}$$

Siispä sen porrastettu ulottuvuus on $q\dim(V^{\otimes 2}) = q^{-2} + 2 + q^2 = (q + q^{-1})^2$. Vastaavasti avaruuden $V^{\otimes n}$ porrastettu ulottuvuus on $q\dim(V^{\otimes n}) = (q + q^{-1})^n$.

Esimerkki 4.34. Jatketaan esimerkin 4.20 Hopfin solmukon tarkastelua. Korvataan kertoimet B^n tensoritulolla $V^{\otimes n}$. Tällöin kuvan 37 mukainen uudelleen vakioitu oioskuutio saa kuvassa 38 esitetyn muodon.



Kuva 38: Hopfin solmukon oioskuutio, jonka kertoimet ovat vektoriavaruuksien tensorituloja.

Seuraavaksi oioskuutien sarakkeiden kertoimet halutaan sisällyttää vektoriavaruuksiin. Tätä varten niiden porrastuksia tulee siirtää sopivalla tavalla. Esimerkiksi kuvassa 38 kolmannen sarakkeiden kerroin on q^2 , joka voitaisiin saada suoraan porrastetusta ulottuvuudesta, jos jokaisen portaan aste olisi kahta suurempi.

Määritelmä 4.35. (*Porrastuksen siirto*) Olkoon $G = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} G_k$ porrastettu ryhmä. Määritellään laskutoimitus $\cdot \{n\}$, joka muuttaa jokaisen k -portaan $(k + n)$ -portaaksi eli

$$G\{n\} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} (G\{n\})_m = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} G_{m-n}.$$

Tällöin $\cdot \{n\}$ on *porrastuksen siirto*.

[4, s. 340]

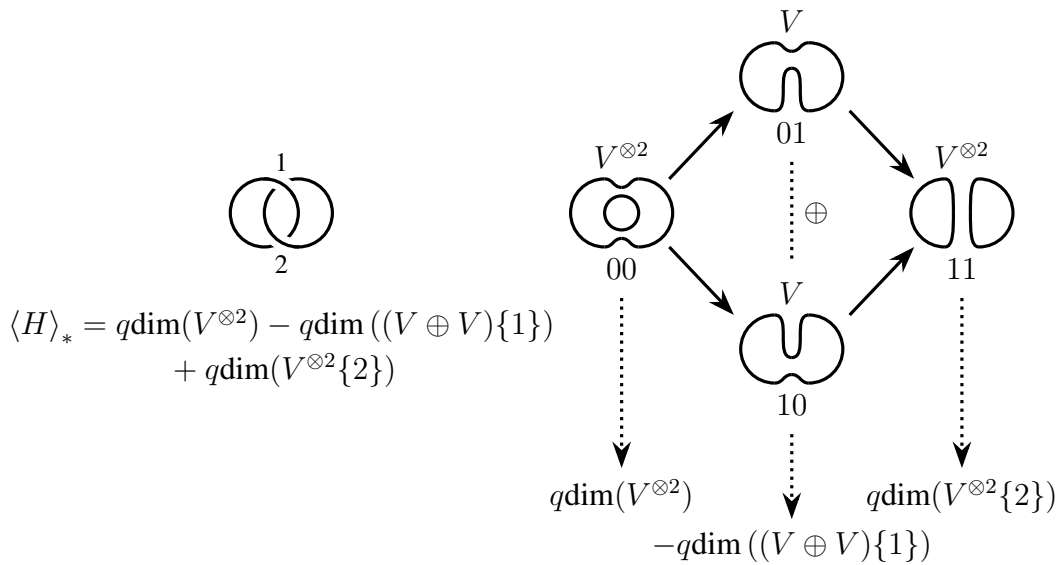
Esimerkki 4.36. Porrastuksen siirto n askeleella muuttaa porrastettua ulottuvuutta kertomalla q^n . Tällöin vaikkapa avaruus V ja sen kahdella siirretty avaruus $V\{2\}$ ovat

$$V = V_{-1} \oplus V_1 \quad \text{ja} \quad V\{2\} = V_1 \oplus V_3.$$

Niiden porrastetut ulottuvuudet ovat vastaavasti

$$q\dim(V) = q^{-1} + q \quad \text{ja} \quad q\dim(V\{2\}) = q + q^3.$$

Näin ollen kuvan 38 oioskuutio voidaan kirjoittaa kuvan 39 muodossa.



Kuva 39: Hopfin solmukon oioskuutio, jonka sarakkeiden porrastuksia on siirretty.

Viimeisinä jäljelle jääneinä yksityiskohtina ovat vaihtuvat etumerkit. Jotta ne voitaisiin palauttaa suoraan oioskuutioon rakenteesta, niin sen sarakkeet on koottava yhteen. Näin saadaan kaksoisporrastettu vektoriavaruus, jonka ensimmäinen porrastus kertoo, mistä sarakkeesta on kyse. Toinen porrastus on sama kuin aikaisemminkin eli se riippuu oiottujen kaavioiden ympyröiden määrästä. Kaksoisporrastetulle rakenteelle voidaan määritellä porrastettu Eulerin–Poincarén tunnus, josta saadaan suoraan etumerkit.

Määritelmä 4.37. (*Porrastettu Eulerin–Poincarén tunnus*) Olkoon $G = \bigoplus_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} G_{(k_1, k_2)}$

kaksoisporrastettu äärellisportainen vektoriavaruus. Sen *Eulerin–Poincarén tunnus* on

$$\chi_q(G) := \sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} (-1)^{k_1} q^{k_2} \dim(G_{(k_1, k_2)}).$$

Eulerin–Poincarén tunnus on erikoistapaus porrastetusta ulottuvuudesta, jossa ensimmäiseksi mahdolliseksi kertoimeksi on valittu luku -1 .  [26, s. 85]

Merkintä 4.38. Olkoon D solmukaavio ja olkoot sitä vastaavan oioskuution n :nnen sarakkeen vektoriavarauudet $V^{\otimes i_1}, \dots, V^{\otimes i_m}$. Merkitään niiden siirrettyä suoraa summaa

$$[D]^n := \left(\bigoplus_{k=1}^m V^{\otimes i_k} \right) \{n\}.$$

Myöhemmin merkintä laajennetaan Hovanovin sulkeiksi.  [4, s. 340]

Esimerkki 4.39. Jatketaan kuvan 39 tarkastelua. Käytetään sarakkeiden vektoriavaruuksista lyhennysmerkintöjä

$$[H]^0 = V^{\otimes 2}, \quad [H]^1 = (V \oplus V)\{1\} \quad \text{ja} \quad [H]^2 = V^{\otimes 2}\{2\}.$$

Nyt voidaan muodostaa kaksiportainen vektoriavaruus $[H] := [H]^0 \oplus [H]^1 \oplus [H]^2$, jonka ensimmäinen portaistus vastaa yläindeksin numeroa ja toinen portaistus on sarakkeiden avaruuksien oma portaistus. Tällöin porrastettu Eulerin–Poincarén tunnus on

$$\chi_q([H]) = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} (-1)^{k_1} q^{k_2} \dim([H]_{k_2}^{k_1}),$$

jossa alaindeksiin on merkitty toinen portaistus. Avataan ensimmäinen summa, jolloin

$$\chi_q([H]) = \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} q^{k_2} \dim([H]_{k_2}^0) - \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} q^{k_2} \dim([H]_{k_2}^1) + \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} q^{k_2} \dim([H]_{k_2}^2).$$

Kun lyhennysmerkinnät korvataan sarakkeiden vektoriavaruuksilla, niin huomataan, että termit vastaavat sarakkeiden porrastettuja ulottuvuuksia eli

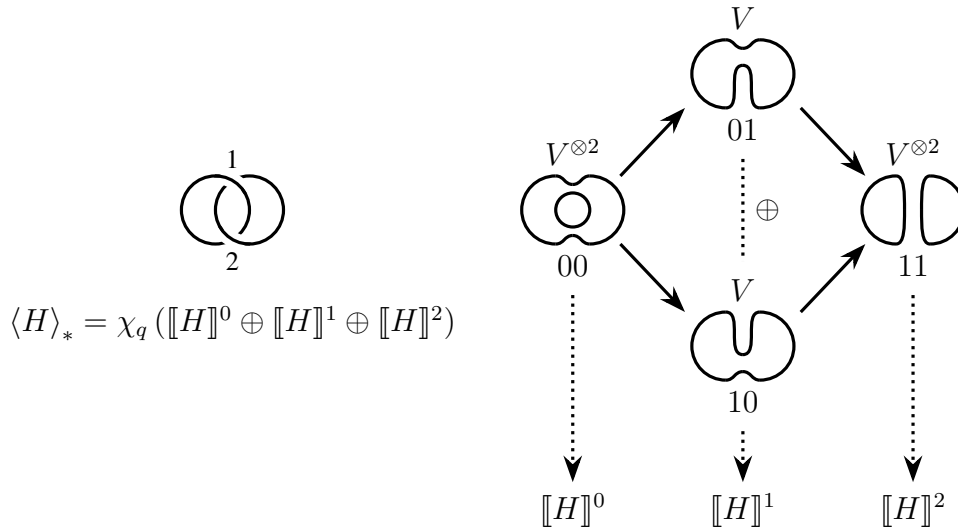
$$\chi_q([H]) = q \dim(V^{\otimes 2}) - q \dim((V \oplus V)\{1\}) + q \dim(V^{\otimes 2}\{2\}) = \langle H \rangle_*.$$

Siispä solmun uudelleen vakioitunut Kauffmanin sulkeet määräävät saman polynomin kuin oioskuutiosta muodostettu porrastettu Eulerin–Poincarén tunnus. Lopputulos on tiivistetty kuvaan 40.

4.2.3 Piena

Alaluvuissa 4.2.1 ja 4.2.2 osoitettiin, että oioskuutioista voidaan muodostaa kaksiportainen vektoriavaruus, josta Jonesin polynomi on laskettavissa. Tällöin kuitenkin paljon oioskuution tiedoista häviää. Tilannetta voidaan parantaa huomioimalla myös kuution särmät. Kuhunkin niistä voidaan liittää piena, joka yhdistää särmän päissä olevat oiotut solmukaaviot.

Yleisessä tapauksessa pieni tarkoittaa monistoa, jonka reuna on erillinen yhdiste kahdesta muusta monistosta. Niistä toinen on pienen alkupää ja toinen loppupää.



Kuva 40: Uudelleen vakioidut Kauffmanin sulkeet voidaan laskea Eulerin–Poincarén tunnuksena kaksoisporrastetusta vektoriavaruudesta.

Määritelmä 4.40. (Piena) Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ monistoja. Jos $\mathcal{P}'$ on $(n+1)$ -ulotteinen monisto, jonka reuna on $\partial\mathcal{P}' = \mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$, niin $\mathcal{P} = (\mathcal{P}', \mathcal{M}, \mathcal{N})$ on *piena*. Sitä merkitään $\mathcal{P}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, jossa $\mathcal{M}$ on *vasemmanpuoleinen* ja $\mathcal{N}$ *oikeanpuoleinen reuna*. Myös pelkkää monistoa $\mathcal{P}'$ voidaan kutsua pienaksi. [21, s. 125]

Pienoista voidaan myös käyttää nimeä kobordismi (ransk. *co- + bord + -isme*). Kobordismi-nimityksessä on kuitenkin huomattava, että etuliite *co-* ei tarkoita tässä tapauksessa kategorioteorian vastakäsitettä, vaan etuliitteen merkitys pohjautuu latinan muotoon *con-*, jolla tarkoitetaan asioiden yhdessä olemista. Pienen ulottuvuus merkitään selvyys vuoksi aina muodossa $n+1$ eli vaikkapa $(1+1)$ -ulotteinen piena tarkoittaa kaksiulotteista monistoa, jonka reunat ovat yksiulotteiset.

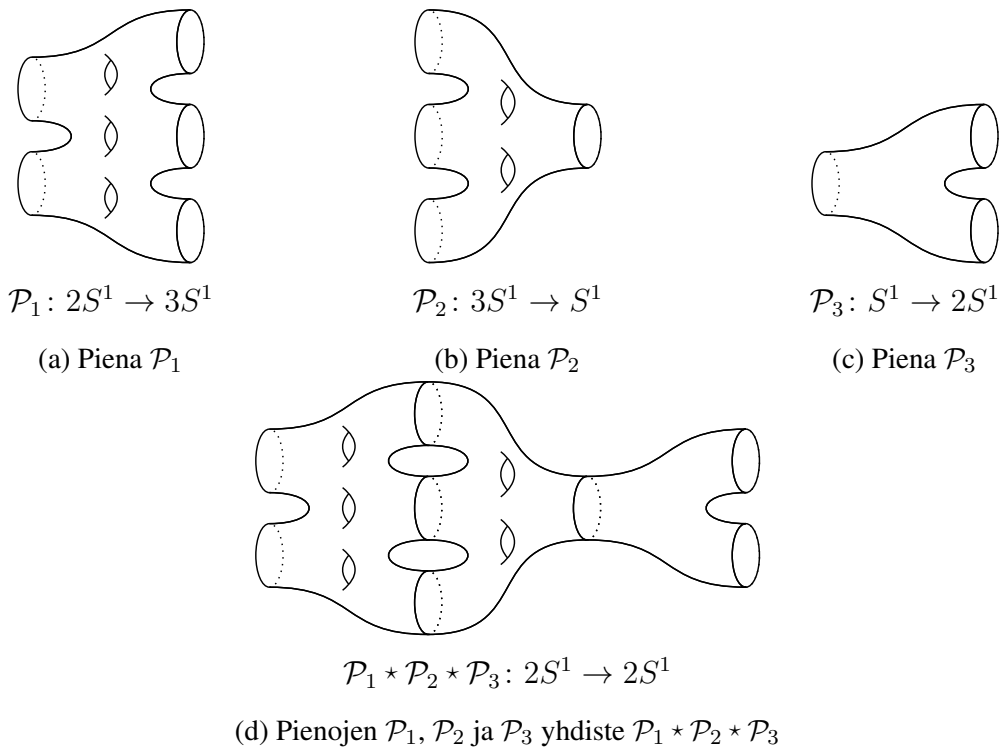
Monistot ja pienat muodostavat kategorian. Jokaiselle monistolle M on olemassa identiteettipiena $M \times I$ kuvan 41a mukaisesti ja kahden moniston välillä voi olla useita erilaisia pienoja, joissa voi olla reikiä kuten kuvassa 41b.



Kuva 41: Monisto S^1 voidaan yhdistää itseensä monenlaisilla pienoilla, joissa voi olla reikiä.

Pienoja voidaan yhdistää toisiinsa ja yhdiste on liitännäinen. Esimerkiksi kuvassa 42d on yhdistettynä kolme erilaista pienaa, jotka on esitetty kuvissa 42a, 42b ja 42c vastaavasti.

Pienat ja niiden reunat muodostavat kategorian. Teknisistä syistä kuitenkin halutaan rajoittaa pienoihin ja reunoihin, jotka käyttäytyvät hyvin sileissä kuvauksissa.



Kuva 42: Pienoja voidaan yhdistää toisiinsa kunhan edellinen piena loppuu samaan avaruuteen, josta jälkimmäinen alkaa. Yhdiste on liitännäinen. Kuvassa on käytetty lyhennysmerkkintää $nS^1 := \bigsqcup_{k=1}^n S^1$, jolla tarkoitetaan usean ympyrän avaruutta.

Merkintä 4.41. Merkintä $\mathbb{R}^{\rightarrow\infty}$ tarkoittaa käytännössä avaruutta, jonka ulottuvuus on tarpeeksi suuri, jotta monisto voidaan upottaa siihen. Se koostuu pisteistä $(x_0, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$, joissa on ainoastaan äärellinen määrä nollasta poikkeavia koordinaatteja.

Täsmällisemmin se määritellään vastarajana $\mathbb{R}^{\rightarrow\infty} := \operatorname{colim}_{k \rightarrow \infty} \mathbb{R}^k$. Sen ylinuolena on kuvaus järjestettyjen luonnollisten lukujen kategoriasta topologisten avaruuksien kategoriaan $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Top}$, joka kuvaa luvun n avaruudeksi $\mathbb{R}^n$ ja lukujen $n \leq m$ välisen nuolen $n \rightarrow m$ inklusiokuvaukseksi

$$i_{nm}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Tällöin rajana on kartio $(\mathbb{R}^{\rightarrow\infty}, i)$, jonka luonnollinen muunnos koostuu inklusiokuvauksista $i_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{\rightarrow\infty}$, jotka vain lisäävät äärettömästi nollia alkuperäisen pisteen koordinaattiesitykseen.  [10, s. 4]

Asetelma 4.42. (*Hyvin käyttäytyvä piena*) Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ suljettuja sileitä monistoja, joiden ulottuvuudet ovat n ja jotka on upotettu avaruuteen $\mathbb{R}^{\rightarrow\infty}$. Kiinnitetään niihin muodolliset reaalityluvut $a < b$, jolloin saadaan parit $(\mathcal{M}, a)$ ja $(\mathcal{N}, b)$.

Kiinnitetään luvut a ja b myös kompaktiin pienaan $\mathcal{P}$, jolloin saadaan kolmikko $(\mathcal{P}, a, b)$. Määritellään kolme vaatimusta, joiden on pädeävä jollain arvolla $\varepsilon > 0$. Ne ovat

1. $\mathcal{P} \cap ([a, a + \varepsilon[\times \mathbb{R}^{\rightarrow\infty}) = [a, a + \varepsilon[\times \mathcal{M}$,
2. $\mathcal{P} \cap (]b - \varepsilon, b] \times \mathbb{R}^{\rightarrow\infty}) =]b - \varepsilon, b] \times \mathcal{N}$ ja
3. $\partial\mathcal{P} = \mathcal{P} \cap (\{a, b\} \times \mathbb{R}^{\rightarrow\infty})$.

Tällöin $\mathcal{P}$ on hyvin käyttäytyvä piena.

 [10, s. 4]

Määritelmä 4.43. (*Pienojen kategoria*) Olkoon $n \in \mathbb{N}$ luonnollinen luku. Tutkitaan asetelman 4.42 mukaisia hyvin käyttäytyviä pienoja. Muodostetaan kategoria **Piena** _{$n+1$} , jonka nuolet ovat $(n+1)$ -ulotteisia pienoja ja jonka pisteet ovat pienojen reunoja, jotka ovat sileitä n -ulotteisia monistoja.  [10, s. 4]

Hovanovin homologian kannalta riittää tarkastella tapausta, jossa $n = 1$. Kategorian **Piena** _{$1+1$} pisteet ovat yksiulotteisia suljettuja monistoja. Ainoat monistot, jotka täyttävät nämä ehdot, ovat diffeomorfisia erilliseen yhdisteeseen ympyröistä. Niistä käytetään merkintää $kS^1 := \bigsqcup_{i=1}^k S^1$, jossa $k \in \mathbb{N}$. Huomionarvoista on myös, että tyhjä avaruus täyttää n -ulotteisen moniston määritelmän kaikilla n , joten tyhjä yhdiste $\emptyset = 0S^1$ on myös kategorian piste. Lisäksi kaikki pisteet voidaan yhdistää pienoilla.

Nimitys 4.44. (*Pienallisuus*) Monistot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ ovat *pienalliset*, jos niiden välillä on olemassa piena.  [20, s. 18]

Apulause 4.45. Kaikki suljetut 1-monistot ovat pienalliset.

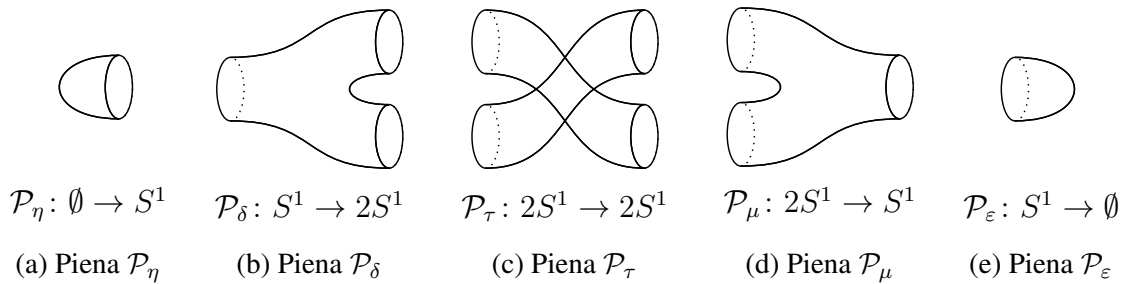
 [20, s. 21] $\square$

Kategorian **Piena** _{$1+1$} nuolet ovat 2-ulotteisia kompakteja reunallisia monistoja. Sekä pisteet että nuolet käyttäytyvät hyvin erillisessä yhdisteessä. Käytännössä, jos on olemassa kaksi $(1+1)$ -ulotteista piena $\mathcal{P}_1: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{N}_1$ ja $\mathcal{P}_2: \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{N}_2$, niin saadaan uusi piena $\mathcal{P}_1 \sqcup \mathcal{P}_2: \mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{N}_1 \sqcup \mathcal{N}_2$.

Huomautus 4.46. Kun $(1 + 1)$ -ulotteiseen pienojen kategoriaan valitaan laskutoimitukseksi erillinen yhdiste, niin saadaan symmetrinen monoidinen kategoria $(\mathbf{Piena}_{1+1}, \sqcup, \emptyset, \mathcal{P}_\tau)$. Tässä neutraalipisteenä on $\emptyset$, joka on kategorian alkupiste ja symmetrianuolena on kuvan 43c vaihtopiena $\mathcal{P}_\tau$. [20, s. 171]

Osoittautuu, että kaikki $(1 + 1)$ -ulotteisien pienojen kategorian nuolet voidaan virittää viidellä eri pienalla. Toisin sanoen kaikki muut pienat voidaan muodostaa yhdistelemällä viittä muuta pienaa tai ottamalla niistä erillinen yhdiste.

Lause 4.47. Kategorian $(\mathbf{Piena}_{1+1}, \sqcup, \emptyset, \mathcal{P}_\tau)$ nuolet voidaan virittää kuvan 43 mukaisilla pienoilla. [20, s. 62–67] $\square$



Kuva 43: Kategoria $(\mathbf{Piena}_{1+1}, \sqcup, \emptyset, \mathcal{P}_\tau)$ voidaan virittää viidellä eri pienalla.

Esimerkki 4.48. Oioskuution särmät voidaan korvata pienoilla. Koska oioskuution kärjet ovat erillisiä yhdisteitä ympyröistä, niin niiden välille voidaan asettaa pienat. Tässä on tärkeää huomata, että ympyröiden näennäisellä sisäkkyydellä ei ole merkitystä, vaan se on vain seurausta esitystavasta, jossa ne on piirretty kaksiulotteiseen tasoon.

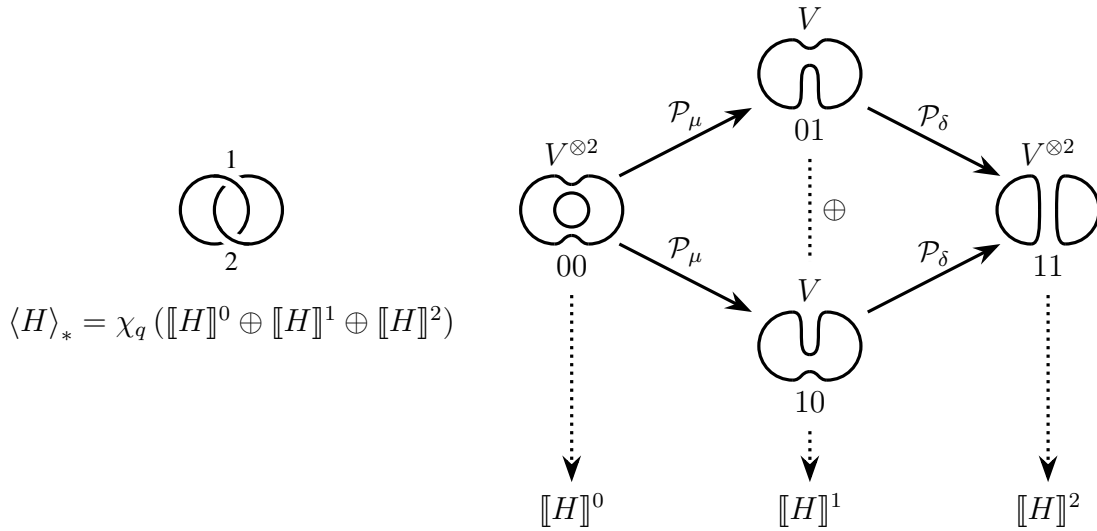
Käytännössä kun risteystä vastaava vaakasuuntainen oios vaihdetaan pystysuuntaiseksi, niin oiottuun solmukaavioon joko muodostuu uusi ympyrä tai siitä lähtee yksi ympyrä pois. Ne ympyrät, jotka eivät olleet kosketuksessa risteykseen, pysyvät samoina. Siispä pienaksi voidaan valita muotoa $\mathcal{P}_\delta \sqcup \mathcal{P}_{\text{id}} \sqcup \dots \sqcup \mathcal{P}_{\text{id}}$ tai $\mathcal{P}_\mu \sqcup \mathcal{P}_{\text{id}} \sqcup \dots \sqcup \mathcal{P}_{\text{id}}$ oleva piena. Yleensä identiteettipienat jätetään merkitsemättä, jolloin vaikkapa Hopfin solmukon oioskuutiosta tulee kuvan 44 mukainen.

4.2.4 Frobeniuksen algebra

Samalla tavalla kuin jokaiseen oioskaavion kärkeen liitettiin vektoriavaruus, niin jokaiseen särmään voidaan liittää vektoriavaruuksien välinen laskutoimitus. Sen vaatimuksena on yhteensopivuus särminä olevien pienojen kanssa. Luonnollisena valintana on Frobeniuksen algebra, joka käyttäytyy samoin kuin kuvan 43 mukaiset virittäjät $(1 + 1)$ -ulotteiselle pienojen kategorialle.

Frobeniuksen algebra tarkoittaa erästä sellaista rakennetta, joka täyttää sekä algebran että vasta-algebran ominaisuudet. Tässä alaluvussa Frobeniuksen algebra määritellään kategorioteoreettisen tavan ohella myös perinteisesti.

Esitetään ensiksi perinteinen määritelmä. Sitä varten esitetään kertauksena muutama peruskäsite algebroidiin ja kaksoislineaarimuotoihin liittyen.



Kuva 44: Jokaiseen oioskuution särmään voidaan liittää pientä, joka on erillinen yhdiste identiteettipienoista ja pienestä $\mathcal{P}_\delta$ tai $\mathcal{P}_\mu$.

Määritelmä 4.49. (*Algebra*) Olkoon A vaihdannaisen renkaan R moduli. Jos lisäksi on määritelty kaksoislineaarinen kertolasku $\cdot : A \times A \rightarrow A$, niin A on *algebra*. Jos kertolaskulla on neutraalialkio, niin algebra on *ykkösellinen*. Jos kertolasku on liitännäinen tai vaihdannainen, niin algebra on vastaavasti *liitännäinen* tai *vaihdannainen*. [15, s. 68]

Muistutus 4.50. (*Lineaarimuoto*) Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla $\mathbb{K}$. Lineaarikuvausta $V \rightarrow \mathbb{K}$ kutsutaan *lineaarimuodoksi*. [28, s. 57]

Määritelmä 4.51. (*Kaksoislineaarimuoto*) Olkoot V ja W vektoriavaruuksia kerroinkunnalla $\mathbb{K}$ ja olkoon $\langle -, - \rangle : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$ kaksipaikkainen kuvaus. Jos jokaisella $v \in V$ ja $w \in W$ saadaan kuvaukset

$$\begin{aligned} \langle v, - \rangle : W &\rightarrow \mathbb{K} & \text{ja} & & \langle -, w \rangle : V &\rightarrow \mathbb{K} \\ u &\mapsto \langle v, u \rangle & & & u &\mapsto \langle u, w \rangle, \end{aligned}$$

jotka ovat lineaarimuotoja, niin $\langle -, - \rangle$ on *kaksoislineaarimuoto*. [3, s. 370]

Määritelmä 4.52. (*Eheä kaksoislineaarimuoto*) Äärellisulotteisten vektoriavaruuksien V ja W kaksoislineaarimuoto $\langle -, - \rangle : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$ on *eheä*, kun $\langle v, - \rangle$ ja $\langle -, w \rangle$ ovat nollakuvauksia ainoastaan, kun $v = 0$ tai $w = 0$. [9]

Frobeniuksen algebran määritelmä koostuu toisaalta algebrasta ja toisaalta siihen liitetystä kaksoislineaarimuodosta. Samasta algebrasta voidaan yleisessä tapauksessa muodostaa useita Frobeniuksen algebroja, joten käytettävä kaksoislineaarimuoto on tärkeää yksilöidä.

Määritelmä 4.53. (*Frobeniuksen algebra*) Olkoon A äärellisulotteinen, ykkösellinen ja liitännäinen algebra, jonka kertoimena on kunta $\mathbb{K}$. Olkoon lisäksi $\beta : A \times A \rightarrow \mathbb{K}$ eheä kaksoislineaarimuoto, joka on liitännäinen. Pari (A, β) on *Frobeniuksen algebra*.

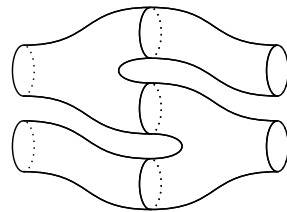
 [20, s. 95]

Kategorioteoreettisesti määriteltynä Frobeniuksen algebra on erikoistapaus Frobeniuksen pisteestä, jolla on sekä monoidin että vastamonoidin ominaisuudet.

Määritelmä 4.54. (Frobeniuksen piste) Olkoon $(\mathcal{A}, \square, E)$ monoidinen kategoria. Viisikko $(M, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ on *Frobeniuksen piste*, kun (M, μ, η) on monoidipiste ja (M, δ, ε) on vastamonoidipiste, joille kaavio (34) on vaihdannainen.  [20, s. 215]

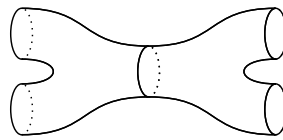
$$\begin{array}{ccccc}
 & & M \square M & & \\
 & \delta \square \text{id}_M \swarrow & \downarrow \mu & \searrow \text{id}_M \square \delta & \\
 M \square M \square M & & M & & M \square M \square M \\
 & \searrow \text{id}_M \square \mu & \downarrow \delta & \swarrow \mu \square \text{id}_M & \\
 & & M \square M & &
 \end{array} \quad (34)$$

Esimerkki 4.55. Kaavion (34) Frobeniuksen ehtoa voidaan havainnollistaa pienen avulla. Laskutoimituksena on totutusti erillinen yhdiste $\sqcup$. Esimerkiksi kuvan 45 vasen osa 45a on topologisesti sama kuin keskiosa 45b. Se voidaan nähdä lyhentämällä vähitellen vasemman puolen kumpaakin uraa.



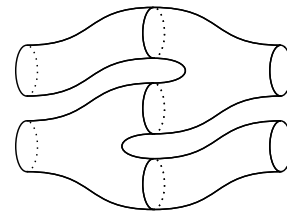
$$(\mathcal{P}_\delta \sqcup \mathcal{P}_{\text{id}}) \star (\mathcal{P}_{\text{id}} \sqcup \mathcal{P}_\mu)$$

(a) Vasen ehto.



$$\mathcal{P}_\mu \star \mathcal{P}_\delta$$

(b) Keskiehto.



$$(\mathcal{P}_{\text{id}} \sqcup \mathcal{P}_\delta) \star (\mathcal{P}_\mu \sqcup \mathcal{P}_{\text{id}})$$

(c) Oikea ehto.

Kuva 45: Pienojen kategorian Frobeniuksen ehto voidaan esittää kolmessa osassa, joiden on kaikkien oltava yhtäpitäviä.

Kun kategoriaksi valitaan vektoriavaruudet, neutraalipisteeksi paljas kerroinkunta ja laskutoimitukseksi tensoritulo, niin saadaan Frobeniuksen algebra. Muistutuksena kategorioteoreettinen monoidipiste on algebra vektoriavaruuksien kategoriassa ja vastaavasti vastamonoidipiste on vasta-algebra.

Määritelmä 4.56. (Frobeniuksen algebra) Vektoriavaruuksien kategorian $(\mathbb{K}\text{-Vekt}, \otimes, \mathbb{K})$ Frobeniuksen piste $(M, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ on *Frobeniuksen algebra*.

Yleisemmin, kun R on vaihdannainen rengas, niin kategorian $(R\text{-Mod}, \otimes_R, R)$ Frobeniuksen piste on Frobeniuksen algebra.  [20, s. 215]

Esimerkki 4.57. Se Frobeniuksen algebra, jota käytetään Hovanovin homologiassa, koostuu neljästä laskutoimituksesta η, ε, μ ja δ . Luominen ja hävittäminen – eli yksikkö ja

vastayksikkö – ovat

$$\begin{array}{ll} \eta: \mathbb{K} \rightarrow V & \text{ja} \quad \varepsilon: V \rightarrow \mathbb{K} \\ 1 \mapsto v_1 & v_1 \mapsto 0, \\ & v_{-1} \mapsto 1. \end{array}$$

Tulo ja vastatulo ovat

$$\begin{array}{ll} \mu: V \otimes V \rightarrow V & \text{ja} \quad \delta: V \rightarrow V \otimes V \\ v_1 \otimes v_1 \mapsto v_1, & v_1 \mapsto v_1 \otimes v_{-1} + v_{-1} \otimes v_1, \\ v_1 \otimes v_{-1} \mapsto v_{-1}, & v_{-1} \mapsto v_{-1} \otimes v_{-1}. \\ v_{-1} \otimes v_1 \mapsto v_{-1}, & \\ v_{-1} \otimes v_{-1} \mapsto 0 & \end{array}$$

Pienojen kategorian virittäjät $\mathcal{P}_\eta, \mathcal{P}_\delta, \mathcal{P}_\mu$ ja $\mathcal{P}_\varepsilon$ vastaavat Frobeniuksen algebran nuolia η, δ, μ ja ε . Koska lisäksi sekä pienojen että vektoriavaruuksien kategoriat ovat symmetriset, niin viimeinen virittäjäpiena $\mathcal{P}_\tau$ vastaa vektoriavaruuden symmetriakuvausta τ .

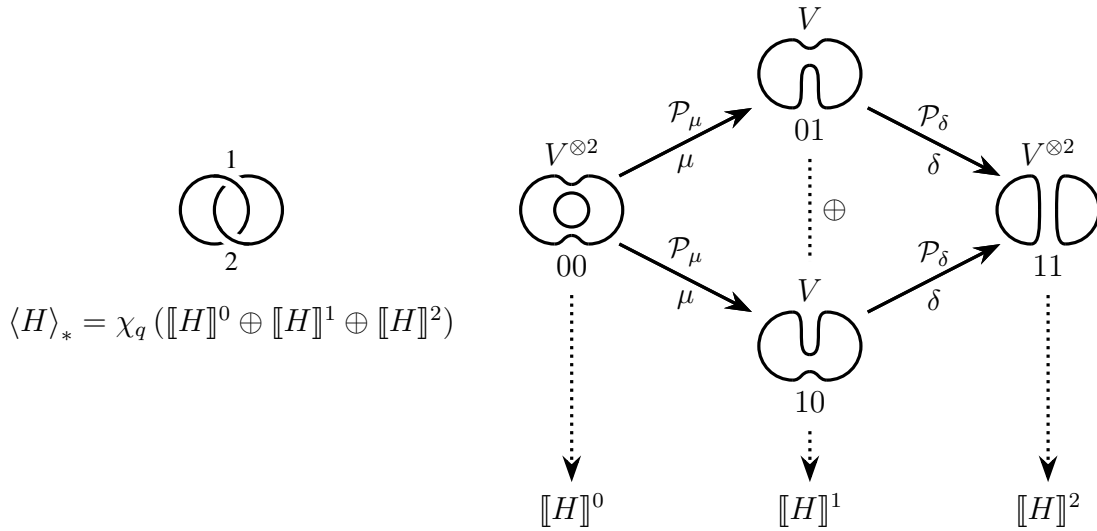
Kun oioskuutien särmien pienat muutetaan niitä vastaaviksi vektoriavaruuksien väliseksi kuvauksiksi, niin jokainen oioskuutien neliö on vaihdannainen. Jotta vaihdannaisuus voitaisiin varmistaa, niin on tutkittava kaikkia kolmea mahdollista tapausta, jotka ovat kaksi peräkkäistä tuloa, kaksi vastatuloa sekä yksi tulo ja yksi vastatulo. Kahdessa helpossa tapauksessa eli kahden tulon tai vastatulon kohdalla kaikki variaatiot ovat vain niiden järjestysten vaihtoja, jotka voidaan muuttaa toisikseen symmetriapienoilla. Kun peräkkäin ovat tulo ja vastatulo jommin kummin päin, niin ne ovat samat kuvan 45 Frobeniuksen ehtoä käyttäen.

Esimerkki 4.58. Hopfin solmukon oioskuutioon voidaan liittää pienat kuvan 46 mukaisesti. Näin muodostuvan neliön yhdisteet ovat kumpikin $\mu \star \delta$, jotka vastaavat Frobeniuksen ehdon keskimmäistä haaraa.

4.2.5 Hovanovin homologian määritelmä

Hovanovin homologia perustuu siihen, että oioskuutioon liitetty porrastetut vektoriavaruuksien ja niiden väliset kuvaukset litistetään ketjukompleksiksi. Tarkalleen ottaen kyseessä on vastaketjukompleksi, koska indeksöinti on päinvastainen kuin ketjukompleksissa, jolloin olisi oikeampaa myös puhua Hovanovin vastahomologiasta. Tässä työssä käytetään kuitenkin vakiintunutta, mutta hiukan epätäsmällistä tapaa, ja kutsutaan sitä Hovanovin homologiaksi.

Valitettavasti luonnollisin tapa muodostaa ketjukompleksi ei toimi, koska oioskuutien neliöt ovat vaidannaiset ja siten differentiaalien yhdiste $d \star d$ on lähtökohtaisesti nollasta poikkeava. Esimerkiksi Hopfin solmukon oioskuutiosta ainoa differentiaali olisi $2(\mu \star \delta)$, joka ei ole nollakuvaus. Tilanne on kuitenkin helppo korjata lisäämällä oioskuutien särmää vastaaviin kuvauksiin sopivasti miinusmerkkejä niin, että jokaisessa neliössä on pariton määrä miinuskuksia, jolloin neliön sivujen kuvaukset kumoavat toisensa.

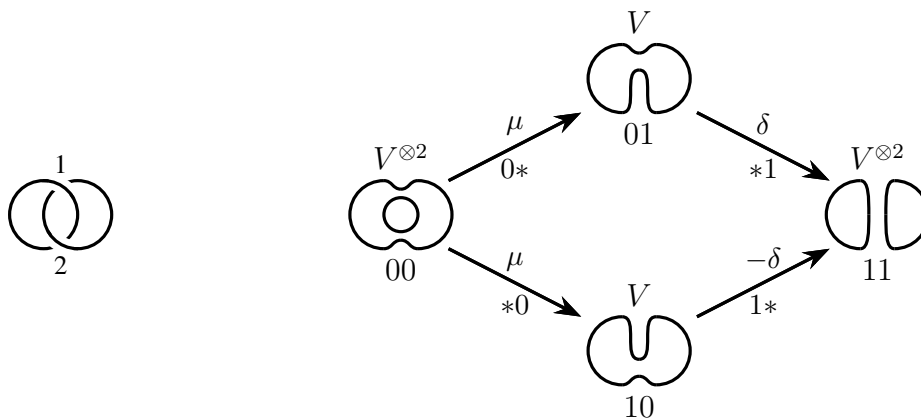


Kuva 46: Jokainen oioskuution särmän piena vastaa Frobeniuksen algebran nuolta.

Menetelmä 4.59. (*Oioskuution kuvausten merkit*) Olkoon $\{0, 1\}^n$ oioskuutio, jonka ulottuvuus on n ja käytetään sen jokaisesta kärjestä binääriesitystä $o_1 \cdots o_n$. Merkitään lisäksi sen särmää muodossa $s = s_1 \cdots s_{i-1} * s_{i+1} \cdots s_n$, jossa $*$ tarkoittaa sitä ainoaa binääriesityksen lukua, joka on erisuuri särmän kärjissä.

Tällöin särmän s taso $|s|$ on sen binääriesityksen ykkösten määrä, jossa tähteä $*$ ei laske- ta mukaan. Nyt särmää s vastaavan kuvauksen merkiksi voidaan asettaa $(-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} s_j}$, jonka potenssina on sen binääriesityksen ykkösten määrä ennen tähden indeksii i . Esimerkiksi särmän $110*10$ indeksi olisi 2.  [4, s. 343]

Esimerkki 4.60. Hopfin solmukon oioskuution särmien $0*$, $*0$ ja $*1$ etumerkit ovat positiiviset, koska niiden tasot ovat 0. Särmän $1*$ etumerkki on negatiivinen, koska sen taso on 1. Tilanne on esitetty kuvassa 47.



Kuva 47: Hopfin solmukon oioskuution kuvaukset, joihin on lisätty etumerkit.

Lause 4.61. Etumerkillisen oioskuution differentiaaleille pätee $d * d = 0$.  [4, s. 343]

Todistus. Ennen merkkien lisäämistä kuution jokainen neliö on vaihdannainen. Tarkastellaan mielivaltaista neliötä, jonka särmien binääriesitykset ovat muotoa

$$s_{**} := s_1 \cdots s_{i-1} * s_{i+1} \cdots s_{j-1} * s_{j+1} \cdots s_n,$$

jossa tähtien indeksit ovat i ja j ja merkintä s_{**} on lyhenne, jolla ilmoitetaan indeksien i ja j binääriluvut. Selvästi särmien s_{*0} ja s_{*1} tasot ovat samat, koska ennen tähteä binääriesitykset ovat samat. Vastaavasti särmän s_{0*} taso on täsmälleen yhtä pienempi kuin särmän s_{1*} taso, koska jälkimmäisessä särmässä on yksi ykkönen enemmän binääriesityksessä. Siispä jokaisessa tapauksessa täsmälleen yksi särmä on erimerkkinen kuin kolme muuta, jolloin oioskuution neliöiden etumerkilliset kuvausparit kumoavat toisensa. $\square$

Etumerkkien lisäämisen jälkeen voidaan muodostaa Hovanovin sulkeet. Niiden määritelmä on melko tekninen, mutta käytännössä ne vastaavat etumerkillisten oioskuutioiden litistämistä. Vastaavuutta käsitellään määritelmän jälkeen esimerkissä 4.63.

Määritelmä 4.62. (*Hovanovin sulkeet*) Määritellään kuvaus $\llbracket \cdot \rrbracket$, jonka lähtöjoukkona ovat kaikki solmukaaviot $\mathcal{D}$ ja jonka maalijoukkona ovat $\mathbb{K}$ -kertoimiset ketjukompleksit. Kuvauksen on toteutettava kolme ehtoa, jotka ovat

1. $\llbracket \bowtie \rrbracket = \text{lv} \left(0 \rightarrow \llbracket \bowtie \rrbracket \xrightarrow{d} \llbracket \triangleright \triangleleft \rrbracket \{1\} \rightarrow 0 \right),$
2. $\llbracket D \sqcup \bigcirc \rrbracket = V \otimes \llbracket D \rrbracket$ ja
3. $\llbracket \emptyset \rrbracket = 0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0.$

Tässä vektoriavaruutena on jälleen $V = \langle v_{-1}, v_1 \rangle$, jonka porrastettu ulottuvuus on $q + q^{-1}$. Kuvauksena d on esimerkin 4.57 mukaisen Frobeniuksen algebran tulo μ tai vastatulo δ riippuen siitä, väheneekö vai kasvaako lopullisen oioskaavion osien määrä kyseisessä kohdassa. Kuvauksen merkki määräytyy menetelmän 4.59 mukaisesti. Lisäksi lv eli ”litistä viistosti”-kuvaus muuntaa kaksinkertaisen ketjukompleksin yksinkertaiseksi ottamalla sen viistosuuntaiset summat. Tämä vastaa kuvan 48 summia.  [4, s. 338]

Esimerkki 4.63. Lasketaan Hovanovin sulkeet Hopfin solmukolle H . Oiotaan ensiksi ylempi risteys, jolloin

$$\llbracket H \rrbracket = \llbracket \bigcirc \bigcirc \rrbracket = \text{lv} \left(0 \rightarrow \llbracket \bigcirc \bigcirc \rrbracket \xrightarrow{d} \llbracket \bigcirc \bigcirc \rrbracket \{1\} \rightarrow 0 \right). \quad (35)$$

Lasketaan sen vasemman kaavion Hovanovin sulkeet. Ne ovat

$$\llbracket \bigcirc \bigcirc \rrbracket = \text{lv} \left(0 \rightarrow \llbracket \bigcirc \bigcirc \rrbracket \xrightarrow{d} \llbracket \bigcirc \bigcirc \rrbracket \{1\} \rightarrow 0 \right).$$

Kun erilliset ympyrät poistetaan, niin saadaan

$$\llbracket \bigcirc \bigcirc \rrbracket = \text{lv} \left(0 \rightarrow V \otimes V \otimes \llbracket \emptyset \rrbracket \xrightarrow{d} V \otimes \llbracket \emptyset \rrbracket \{1\} \rightarrow 0 \right).$$

Aukaistaan tyhjiä solmukaavioiden Hovanovin sulkeet, niin saadaan kaksoiskompleksi

$$\llbracket \text{☉} \rrbracket = \text{lv} \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0\{1\} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & V^{\otimes 2} & \xrightarrow{\mu} & V\{1\} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0\{1\} & \longrightarrow & 0 \end{array} \right).$$

Se on litistettynä

$$\llbracket \text{☉} \rrbracket = 0 \rightarrow V^{\otimes 2} \xrightarrow{\mu} V\{1\} \rightarrow 0. \quad (36)$$

Vastaavalla tavalla yhtälön (35) oikeat Hovanovin sulkeet ovat

$$\llbracket \text{☐} \rrbracket = 0 \rightarrow V \xrightarrow{\delta} V^{\otimes 2}\{1\} \rightarrow 0. \quad (37)$$

Kun yhtälöt (36) ja (37) sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön (35), niin saadaan kaksoiskompleksi

$$\llbracket H \rrbracket = \text{lv} \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0\{1\} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & V^{\otimes 2} & \xrightarrow{\mu} & V\{1\} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \mu & & \downarrow \delta & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & V\{1\} & \xrightarrow{\delta} & V^{\otimes 2}\{2\} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0\{1\} & \longrightarrow & 0 \end{array} \right).$$

Kun tämä vielä litistetään, niin saadaan

$$\llbracket H \rrbracket = 0 \rightarrow V^{\otimes 2} \xrightarrow{\mu \oplus \mu} V\{1\} \oplus V\{1\} \xrightarrow{\delta \oplus \delta} V^{\otimes 2}\{2\}.$$

Tulos on odotetusti sama kuin kuvan 48 mukaisesti oioskuution avulla laskettuna.

Lisätään kuvauksiin etumerkit menetelmällä 4.59. Tällöin kolmannen rivin kuvauksen $\delta: V\{1\} \rightarrow V^{\otimes 2}\{2\}$ etumerkistä tulee negatiivinen, mutta kaikkien muiden kuvauksien etumerkit säilyvät positiivisina. Siispä päädytään lopputulokseen

$$\llbracket H \rrbracket = 0 \rightarrow V^{\otimes 2} \xrightarrow{\mu \oplus \mu} V\{1\} \oplus V\{1\} \xrightarrow{\delta \oplus -\delta} V^{\otimes 2}\{2\}.$$

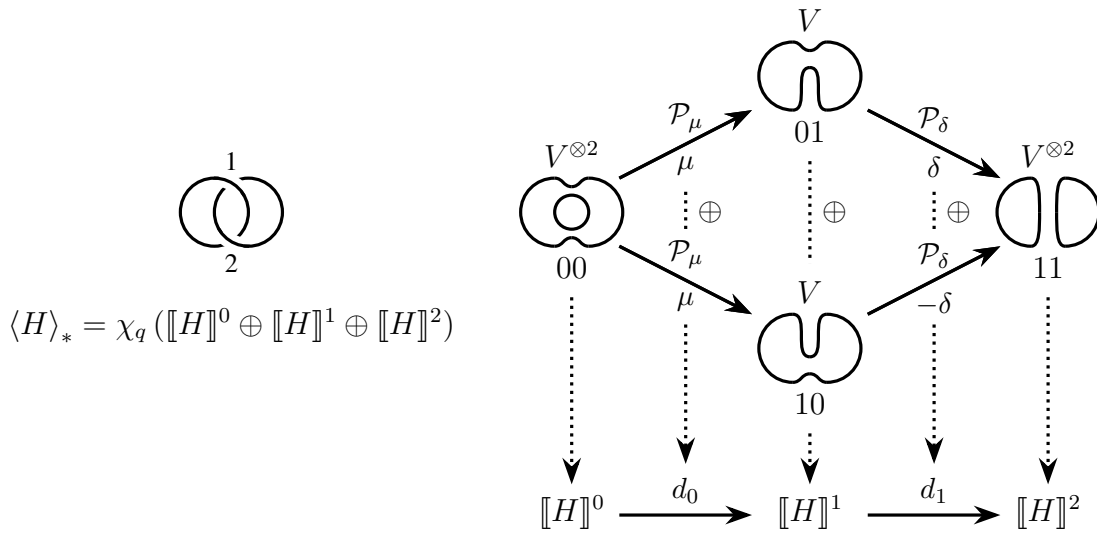
Kun Jonesin polynomia muodostetaan, niin Kauffmanin sulkeet pitää kertoa risteyksien suunnista riippuvilla termeillä, jotta ne säilyvät kaikissa Reidemeisterin siirroissa. Vastaavalla tavalla Hovanovin sulkeiden porrastusta ja ketjukompleksin termien numerointia on siirrettävä, jotta saataisiin solmutunnus.

Merkintä 4.64. (Korkeussiirto) Olkoon $A = (\cdots A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots)$ ketjukompleksi. Sen korkeussiirto $A[k]$ muuttaa indeksöintiä niin, että uudeksi ketjukompleksiksi tulee $A[k] = (\cdots A_{n-1-k} \xrightarrow{d_{n-1-k}} A_{n-k} \xrightarrow{d_{n-k}} A_{n+1-k} \xrightarrow{d_{n+1-k}} \cdots)$. [4, s. 340]

Määritelmä 4.65. (Hovanovin homologia) Olkoon L solmukko. Sen Hovanovin ketjukompleksi on

$$C^{\text{Hov}}(L) = \llbracket L \rrbracket [\text{X}] (L) \{ 2 \text{X} (L) - \text{X} (L) \}.$$

Sille laskettua homologiaa kutsutaan Hovanovin homologiaksi ja siitä käytetään merkintää $H^{\text{Hov}}(L)$. [19, s. 40]



Kuva 48: Kun Frobeniuksen algebran etumerkilliset nuolet yhdistetään, niin muodostuu Hovanovin ketjukompleksi.

Määritelmässä on käytetty solmukkoa L solmukaavion sijaan, koska osoittautuu, että Hovanovin homologia ei riipu valitusta solmukaaviosta. Mutta ennen kuin Hovanovin homologian ominaisuuksiin solmutunnuksena palataan, niin näytetään, miten homologia voidaan laskea yksinkertaiselle kaaviolle.

Esimerkki 4.66. Selvitetään Hovanovin homologia positiiviseen kiertosuuntaan suunnatulle Hopfin solmukolle. Käytetään laskutoimituksissa yhtälöä (38) kaaviota.

$$\text{Diagram of a Hopf link with arrows indicating orientation.} \quad (38)$$

Ideana on esittää oioskuution kärkien vektoriavaruudet virittäjiensä avulla ja sen jälkeen kirjoittaa särmien osoittamat kuvaukset matriisimuodossa. Tämän jälkeen kuvausten ydin- ja kuvajoukot on helppo selvittää ja edelleen laskea homologia.

Hopfin solmukon oioskuution vektoriavaruudet ovat virittäjiensä avulla auki kirjoitettuna

$$V = \langle v_{-1}, v_1 \rangle \quad \text{ja} \quad V^{\otimes 2} = \langle v_{-1} \otimes v_{-1}, v_{-1} \otimes v_1, v_1 \otimes v_{-1}, v_1 \otimes v_1 \rangle.$$

Esimerkin 4.57 Frobeniuksen algebran tulo ja vastatulo voidaan esittää yhtälörivien (39) ja (40) mukaisina matriiseina.

$$\begin{array}{c|cccc} \mu & v_{-1} \otimes v_{-1} & v_{-1} \otimes v_1 & v_1 \otimes v_{-1} & v_1 \otimes v_1 \\ \hline v_{-1} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow M_\mu := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{array}{c|cc} \delta & v_{-1} & v_1 \\ \hline v_{-1} \otimes v_{-1} & 1 & 0 \\ v_{-1} \otimes v_1 & 0 & 1 \\ v_1 \otimes v_{-1} & 0 & 1 \\ v_1 \otimes v_1 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow M_\delta := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Siispä kuvassa 48 näkyvät differentiaalit $d_0 = \mu \oplus \mu$ ja $d_1 = \delta \oplus -\delta$ ovat matriisimuodoissa

$$d_0 = \begin{bmatrix} M_\mu \\ M_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad d_1 = \begin{bmatrix} M_\delta & -M_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Differentiaalien yhdisteelle on voimassa $d_0 \star d_1 = 0$, kuten täytyykin olla. Huomautuksena matriisikertolaskun järjestys on vakiintuneen käytännön mukaisesti päinvastainen nuolten järjestykseen eli matriisi d_1 on kertolaskun ensimmäinen tekijä.

Varsinainen homologia – tai oikeastaan vastahomologia – voidaan selvittää vertailemalla differentiaalien kuva- ja ydinjoukkoja. Sitä varten selvitetään, miten yleinen vektori kuvautuu kuvauksissa d_0 ja d_1 . Kuvat ovat

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+c \\ d \\ b+c \\ d \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c \\ b-d \\ b-d \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kuvauksen d_0 ydin saadaan valinnoilla $b+c=0$ ja $d=0$ eli käytännössä muuttuja a voidaan valita vapaasti ja lisäksi muuttujista b ja c toinen voidaan valita, kun toinen on siihen nähden vastakkaismerkkinen. Virittäjien avulla ilmaistuna ydin on siten

$$\text{Ker}(d_0) = \mathbb{K} \cdot (v_{-1} \otimes v_{-1}) \oplus \mathbb{K} \cdot (v_{-1} \otimes v_1 - v_1 \otimes v_{-1}).$$

Vektorit $[1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ ja $[0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$ virittävät kuvauksen d_0 kuvajoukon, joka on virittäjämuodossa kirjoitettuna

$$\text{Im}(d_0) = \mathbb{K} \cdot (v_{-1}^1 + v_{-1}^2) \oplus \mathbb{K} \cdot (v_1^1 + v_1^2),$$

jossa yläindeksit on merkitty erottamaan kahden avaruuden V kopion virittäjät toisistaan.

Vastaavasti kuvauksen d_1 ydin- ja kuvajoukot voidaan esittää muodoissa

$$\begin{aligned} \text{Ker}(d_1) &= \mathbb{K} \cdot (v_{-1}^1 + v_{-1}^2) \oplus \mathbb{K} \cdot (v_1^1 + v_1^2) \quad \text{ja} \\ \text{Im}(d_1) &= \mathbb{K} \cdot (v_{-1} \otimes v_{-1}) \oplus \mathbb{K} \cdot (v_{-1} \otimes v_1 + v_1 \otimes v_{-1}). \end{aligned}$$

Porrastamattomat Hovanovin homologiaryhmät saadaan suoraan differentiaalien kuvien ja ytimien asteista. Nollas homologiaryhmä on

$$H_0^{\text{Hov}} = \text{Ker}(d_0)/0 = \mathbb{K}^2.$$

Ensimmäinen ja toinen homologiaryhmä ovat vastaavasti

$$H_1^{\text{Hov}} = \text{Ker}(d_1)/\text{Im}(d_0) = \mathbb{K}^2/\mathbb{K}^2 = 0 \quad \text{ja} \quad H_2 = \mathbb{K}^4/\text{Im}(d_1) = \mathbb{K}^2,$$

koska avaruus $\llbracket H \rrbracket^0$ on neliulotteinen. Käytännössä homologiassa halutaan vielä erotella porrastukset. Tällöin homologiaryhmien laskemisessa on huomioitava virittäjien porrastukset, jolloin saadaan kaksipaikkainen homologia $H_{i,j}^{\text{Hov}}$. Homologiaryhmät ovat ennen porrastuksia ja vakiointia virittäjien avulla ilmaistuna

$$\begin{aligned} H_0^{\text{Hov}} &\sim \mathbb{K} \cdot (v_{-1} \otimes v_{-1}) \oplus \mathbb{K} \cdot (v_{-1} \otimes v_1 - v_1 \otimes v_{-1}) = \mathbb{K}_{-2} \oplus \mathbb{K}_0, \\ H_1^{\text{Hov}} &\sim 0 \quad \text{ja} \\ H_2^{\text{Hov}} &\sim \frac{\mathbb{K}_{-2} \oplus \mathbb{K}_0 \oplus \mathbb{K}_0 \oplus \mathbb{K}_2}{\mathbb{K} \cdot (v_{-1} \otimes v_{-1}) \oplus \mathbb{K} \cdot (v_{-1} \otimes v_1 + v_1 \otimes v_{-1})} = \mathbb{K}_0 \oplus \mathbb{K}_2. \end{aligned}$$

Porrastetun Hovanovin homologian nollasta poikkeavat osat ovat siis $H_{0,-2}^{\text{Hov}} = \mathbb{K}$, $H_{0,2}^{\text{Hov}} = \mathbb{K}$, $H_{2,-2}^{\text{Hov}} = \mathbb{K}$ ja $H_{2,2}^{\text{Hov}} = \mathbb{K}$. Ne on esitetty taulukossa 10a. Alivaruuksien porrastuksen jälkeen ne ovat taulukon 10b mukaiset. Huomautuksena portaiden siirto on ketjukompleksien siirtoon nähden vastakkaissuuntainen, koska kyseessä on vastakompleksi.

Taulukko 10: Hopfin solmukon Hovanovin homologia ennen vakiointia

(a) Porrastuksitta					(b) Porrastuksilla				
j, i	0	1	2		j, i	0	1	2	
-2	$\mathbb{K}$				-2	$\mathbb{K}$			
-1					-1				
0	$\mathbb{K}$		$\mathbb{K}$		0	$\mathbb{K}$			
1					1				
2			$\mathbb{K}$		2			$\mathbb{K}$	
$\sum$	$\mathbb{K}^2$	0	$\mathbb{K}^2$		3				
					4			$\mathbb{K}$	
					$\sum$	$\mathbb{K}^2$	0	$\mathbb{K}^2$	

Varsinaiseen Hovanovin homologiaan on vielä huomioitava sekä ketjukompleksin porrastukset että uudelleen vakiointi. Sen porrastuksen ja korkeuden siirrot ovat

$$\begin{aligned} \{n\} &= 2 \left[\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right] (H) - \left[\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right] (H) = 0 - 2 = -2 \quad \text{ja} \\ [k] &= \left[\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right] (H) = 0. \end{aligned}$$

Siispä taulukon i -indeksin arvot säilyvät samoina, mutta j -indeksi muuttuu. Lopullinen Hovanovin homologia on esitetty taulukossa 11. Työssä oltaisiin voitu käyttää myös toisenlaista konventiota, joka pohjautuu tavallisiin ketjukomplekseihin, jonka indeksointi on käännetty. Tällöin taulukosta olisi tullut muuten samanlainen, mutta indeksien i ja j etumerkit olisivat vaihtuneet.

Taulukko 11: Hopfin solmukon Hovanovin homologia

j, i	0	1	2
0	$\mathbb{K}$		
1			
2	$\mathbb{K}$		
3			
4			$\mathbb{K}$
5			
6			$\mathbb{K}$
$\sum$	$\mathbb{K}^2$	0	$\mathbb{K}^2$

Hovanovin homologia on solmutunnus eli se säilyy jokaisessa kolmessa Reidemeisterin siirroissa.

Lause 4.67. *Hovanovin homologia on solmutunnus.*

 [4, s. 346]

Todistuksen idea. Tarkastellaan esimerkin vuoksi, kuinka voitaisiin todistaa, että Hovanovin homologia säilyy Reidemeisterin I-tyypin siirroissa.

Solmun polven aukaisemista vastaava Hovanovin sulkeiden ketjukompleksi on

$$A := \left[\left[\text{loop} \right] \right] = \left(0 \rightarrow \left[\left[\text{cap} \right] \right] \xrightarrow{\mu} \left[\left[\text{cup} \right] \right] \rightarrow 0 \right).$$

Sille voidaan määritellä alikompleksi A' , joka on muuten sama kuin alkuperäinen kompleksi, mutta jolle ensimmäisen oiotun kaavion ympyrää vastaavan porrastetun vektoriavaruuden toinen virittäjä poistetaan. Tällöin voidaan tutkia tekijäkompleksia A/A' , minkä seurauksena huomataan, että jälkimmäisen oiotun kaavion Hovanovin sulkeet ovat korkeussiirota vaille samat kuin tekijäkompleksin Hovanovin sulkeet. Näin ollen Hovanovin sulkeet säilyvät Reidemeisterin I-tyypin siirroissa. $\square$

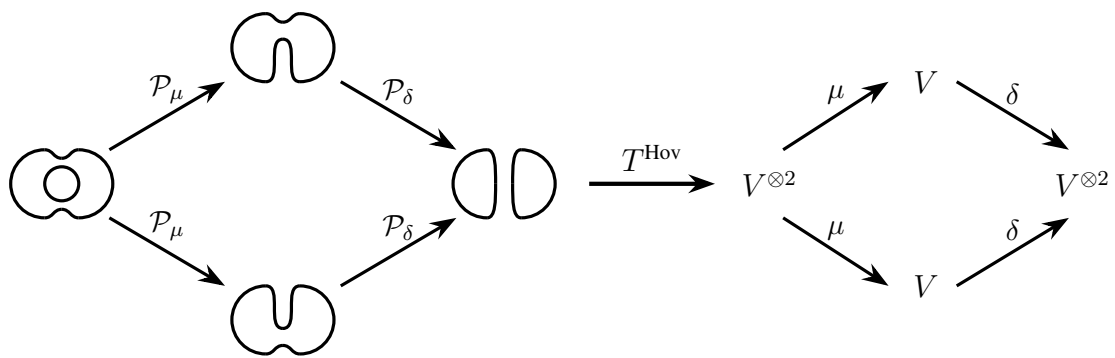
4.3 Topologinen kvanttikenttäteoria

Hovanovin homologian määritelmä on lähes suora erikoistapaus topologisista kvanttikenttäteorioista. Ne ovat ylinuolia, jotka kuvaavat $(n + 1)$ -ulotteisien pienen kategorian $\mathbb{K}$ -kertoimisien vektoriavaruuksien kategoriaksi.

Määritelmä 4.68. (*Topologinen kvanttikenttäteoria*) Olkoon $\mathbb{K}$ kunta. *Topologinen kvanttikenttäteoria* on symmetrinen monoidinen ylinuoli $T: \mathbf{Piena}_{n+1} \rightarrow \mathbb{K}\text{-Vekt}$. Määritelmästä on olemassa myös yleistettyjä versioita, joissa käytetään korkeampia kategorioita tai yleisempiä maalikategorioita.  [24, s. 4]

Esimerkki 4.69 (Hovanovin homologia topologisena kvanttikenttäteorianä). Tutkitaan $(1 + 1)$ -ulotteisien pienen kategorian. Sen eräänä kaaviona on kuvan 49 vasemmanpuoleinen oioskuutio. Määritellään ylinuoli T^{Hov} , joka kuvaa pienen kategorian kaaviot $\mathbb{K}$ -kertoimisien vektoriavaruuksien kaavioksi kuvan 49 oikean puolen mukaisesti.

Osalla topologisista kvanttikenttäteorioista on fysikaalisia tulkintamahdollisuuksia. Erään teorian mukaan maailmankaikkeus rakentuisi pohjimmiltaan $(3 + 1)$ -ulotteisen topologisen kvanttikenttäteorian varaan. Käytännössä se tarkoittaisi, että kaikki maailmankaikkeuden fysikaaliset tapahtumat riippuisivat ainoastaan avaruuden topologisesta rakenteesta, jolloin vaikkapa pituuksien, kulmien ja kaarevuuden käsitteet olisivat epäolennaisia. Topologisen kvanttikenttäteorioiden tutkiminen on kuitenkin äärimmäisen hankalaa korkeammissa ulottuvuuksissa. Osasyynä siihen on, että korkeaulotteisten monistojen yleispätevää luokittelutapaa ei tunneta.



Kuva 49: Hovanovin homologian rakentamista vastaava $(1 + 1)$ -ulotteinen topologinen kvanttikenttäteoria kuvaa pienen kategoriassa esitetyn oioskuution vektoriavaruuksien kategorian kaavioksi ylinuolella T^{Hov} .

Kuvat

Kuva 1	Perusryhmä ylinuolena	11
Kuva 2	Ketjukompleksi ja tarkka jono	17
Kuva 3	Homologiaryhmä	21
Kuva 4	Nollas kolmiohomologiaryhmä	22
Kuva 5	Moniulotteiset kolmiot	23
Kuva 6	Kolmion suuntaaminen	24
Kuva 7	Reunakuvaus	27
Kuva 8	n -sykli ja n -reuna	29
Kuva 9	Toruksen kolmiointi	33
Kuva 10	Toruksen kolmiointi	35
Kuva 11	Monisto	39
Kuva 12	Reunallinen monisto	40
Kuva 13	Kartta	40
Kuva 14	Kartanvaihto	41
Kuva 15	Sileä kuvaus	42
Kuva 16	Peitekuvaus	43
Kuva 17	Kahdeksikon peiteavaruuksia	44
Kuva 18	Ympyrän epätriviaaleja peiteavaruuksia	47
Kuva 19	Säännöllinen peiteavaruus	48
Kuva 20	Epäsäännöllinen peiteavaruus	48
Kuva 21	Solmuja ja solmukoita	50
Kuva 22	Reidemeisterin siirrot	51
Kuva 23	Kolmiväritettyvyys	52
Kuva 24	Kolmiväritettyvyyden säilyminen	52
Kuva 25	Wirtingerin esityksen säännöt	54
Kuva 26	Apilasolmun Wirtingerin esitys	54
Kuva 27	Risteysten oikominen	55
Kuva 28	Seifertin menetelmän ensimmäinen vaihe	55
Kuva 29	Seifertin menetelmän toinen vaihe	56
Kuva 30	Seifertin kierrosten liitos	56
Kuva 31	Seifertin menetelmän kolmas vaihe	57
Kuva 32	Epäsolmun komplementin ääretön syklinen peiteavaruus	58
Kuva 33	Risteyksen suunta	64
Kuva 34	Vyyhde Reidemeisterin I-siirrossa	65
Kuva 35	Oioskuutio	68
Kuva 36	Kauffmanin sulkeet oioskuutiona	69
Kuva 37	Uudelleen vakioitu oioskuutio	72
Kuva 38	Tensorimuotoinen oioskuutio	74
Kuva 39	Oioskuutio, jonka porrastusta siirretty	75
Kuva 40	Eulerin–Poincarén tunnus oioskuutiosta	77
Kuva 41	Identiteettipiena	77

Kuva 42	Pienojen liitos	78
Kuva 43	Virittäjät $(1 + 1)$ -ulotteiselle pienojen kategorialle	80
Kuva 44	Oioskuutio pienoineen	81
Kuva 45	Frobeniuksen ehto pienoina	82
Kuva 46	Frobeniuksen algebra oioskuutiossa	84
Kuva 47	Oioskuution merkit	84
Kuva 48	Hovanovin homologia oioskuutiosta	87
Kuva 49	Topologinen kvanttikenttäteoria	92

Taulukot

Taulukko 1	Yleiset merkinnät	viii
Taulukko 2	Kategorioiden nimet	ix
Taulukko 3	Kategorioihin liittyvät merkinnät	ix
Taulukko 4	Topologiaan liittyvät merkinnät	x
Taulukko 5	Solmuihin liittyvät merkinnät	xi
Taulukko 6	Ryhmiin liittyvät merkinnät	xi
Taulukko 7	Renkaisuun liittyvät merkinnät	xii
Taulukko 8	Muut algebralliset merkinnät	xii
Taulukko 9	Lyhenteet	xiii
Taulukko 10	Hopfin solmukon Hovanovin homologia ennen vakiointia	89
Taulukko 11	Hopfin solmukon Hovanovin homologia	90

Viitteet

- [1] Martina Aaltonen. *Solmukaaviot, Seifertin pinnat ja Aleksanderin invariantti*. Helsingin yliopisto, 2012. URL <http://hdl.handle.net/10138/37872>. URN:NBN:fi-fe2017112252072.
- [2] Michael Artin. *Algebra*. Pearson Prentice Hall, 2011. ISBN 9780132413770.
- [3] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 4 edition, 2024. ISBN 978-3-031-41025-3.
- [4] Dror Bar-Natan. On khovanov's categorification of the jones polynomial. *Algebraic & Geometric Topology*, 2(1):337–370, May 2002. ISSN 1472-2747. doi: 10.2140/agt.2002.2.337. URL <http://dx.doi.org/10.2140/agt.2002.2.337>.
- [5] Winfried Bruns ja Joseph Gubeladze. *Polytopes, rings, and K-theory*, volume 27. Springer, 2009. ISBN 978-0-387-76355-2.
- [6] Harm Derksen. Universal denominators of hilbert series. *Journal of Algebra*, 285(2): 586–607, 2005. doi: 10.1016/j.jalgebra.2004.10.029.
- [7] David S. Dummit ja Richard M. Foote. *Abstract Algebra*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 3 edition, 2004. ISBN 978-0-471-43334-9.
- [8] Sini J Eronen. *Solmuteoriaa kombinatorisesti – Solmut ja punokset Kalevala Ko-ruissa*. Itä-Suomen yliopisto, 2017. URL <https://erepo.uef.fi/handle/123456789/18618>. URN:NBN:fi:uef-20170944.
- [9] T. A. Fisher. Linear algebra: Non-degenerate bilinear forms. 2008.
- [10] Soren Galatius, Ib Madsen, Ulrike Tillmann, ja Michael Weiss. The homotopy type of the cobordism category. 2010. doi: 10.48550/arXiv.math/0605249. URL <https://arxiv.org/abs/math/0605249>.
- [11] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002. ISBN 0-521-79540-0. URL <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.
- [12] Jyri Hiltunen. *Pääideaalialueen yli määriteltyjen äärellisviritteisten modulien rakennelause*. Tampereen yliopisto, 2014. URL <https://trepo.tuni.fi/handle/10024/95162>. URN:NBN:fi:uta-201404081309.
- [13] Hermann Huhtamäki. *Perusryhmä ja topologisen avaruuksien luokittelu*. Aalto-yliopisto, 2023. URL <https://aaltodoc.aalto.fi/handle/123456789/125279>. URN:NBN:fi:aalto-202312277644.
- [14] Hermann Huhtamäki. *Yonedan apulause*. Helsingin yliopisto, June 2025. doi: 10.5281/zenodo.17279645. URL <https://doi.org/10.5281/zenodo.17279645>.

- [15] Jokke Häsä. *Algebra II*. Helsingin yliopisto, 2010. URL <https://www.cs.helsinki.fi/u/jhasa/kurssit/algebraII/materiaali.pdf>.
- [16] Vaughan F.R. Jones. A polynomial invariant for knots via von neumann algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 12(1):103–111, 1985.
- [17] Vaughan F.R. Jones. *The jones polynomial*. University of California at Berkeley, 2005.
- [18] Esko Keski-Vakkuri, Claus Montonen, ja Marco Panero. *Mathematical Methods for Physics: An Introduction to Group Theory, Topology and Geometry*. Cambridge University Press, 2022. ISBN 9781108120531. doi: 10.1017/9781108120531.
- [19] Mikhail Khovanov. A categorification of the jones polynomial, 1999. URL <https://arxiv.org/abs/math/9908171>.
- [20] Joachim Kock. *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories*. Number 59 in London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2003. ISBN 978-0-521-83267-0.
- [21] Antoni A. Kosinski. *Differential Manifolds*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, Inc., 1993. ISBN 0-12-421850-4.
- [22] Antti Kykkänen. *Äärellisesti määrättyjen modulien homologista algebraa*. Tampereen yliopisto, 2020. URL <https://trepo.tuni.fi/handle/10024/120391>. URN:NBN:fi:tuni-202004063105.
- [23] W.B. Raymond Lickorish. *An introduction to knot theory*. Graduate Texts in Mathematics, 175. Springer Science & Business Media, 1997. ISBN 978-0-387-98254-0.
- [24] Jacob Lurie. *On the Classification of Topological Field Theories*. International Press, 2009. doi: 10.4310/CDM.2008.v2008.n1.a3.
- [25] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2 edition, 1998. ISBN 978-0-387-98403-8.
- [26] Peter S Ozsváth, András I Stipsicz, ja Zoltán Szabó. *Grid homology for knots and links*, volume 208 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2015. ISBN 978-1-4704-1737-6.
- [27] Pekka Pankka. *Perusryhmä ja peiteavaruus*. Helsingin yliopisto, 2014. URL <https://www.mv.helsinki.fi/home/pankka/PerusPeite2014>.
- [28] Jouni Parkkonen. *Differentiaaligeometria*. Jyväskylän yliopisto, 2023. URL <https://users.jyu.fi/~parkkone/DG2023/DG2023.pdf>.
- [29] Mika Pohto. *Algebrallisia lähestymistapoja Golomb-Welch konjektuuriin*. Turun yliopisto, 2024. URL <https://www.utupub.fi/handle/10024/176989>. URN:NBN:fi-fe2024042220612.

- [30] Jacob Rasmussen. *Knots, polynomials, and categorification*. IAS/Park City Mathematics Series. American Mathematical Society, United States, December 2021. ISBN 9781470461232. doi: 10.1090/pcms/028/02.
- [31] Dale Rolfsen. *Knots and links*. American Mathematical Society, 2003. ISBN 978-0-8218-3436-7.
- [32] Joseph J. Rotman. *An introduction to algebraic topology*. Graduate Texts in Mathematics, 119. Springer Science & Business Media, 2013. ISBN 978-1-4612-8930-2.
- [33] Herbert Seifert ja William Threlfall. *A Textbook of Topology*, volume 89 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York, 1980. ISBN 9780080874050.
- [34] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [35] Aleksi Virta. *Singulaarista homologiaa*. Tampereen yliopisto, 2021. URL <https://trepo.tuni.fi/handle/10024/134543>. URN:NBN:fi:tuni-202110067438.
- [36] Jussi Väisälä. *Topologia II*. Limes, Helsinki, 1999. ISBN 951-745-185-7.
- [37] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 1994. ISBN 9780521559871.

Hakemisto

A		heikko topologia	37
abelointi	54	homologia	21
abelointikuvaus	56	modulikertoiminen	21
Alexanderin moduli	59	homologiaryhmä	21
Alexanderin polynomi	60	homotopia	
algebra	81	kuvauksien	10
liitännäinen	81	suhteellinen	10
vaihdannainen	81	homotopiakategoria	10
ykkösellinen	81	kantapisteellinen	10
alikompleksi	18	homotopiaryhmä	53
alkualkio	3	Hopfin solmukko	50
alkupiste	15	Hovanovin homologia	86
alkutekijähajotelma	4	Hopfin solmukon	87
apilasolmu	50	Hovanovin ketjukompleksi	86
aritmetiikan peruslause	4	Hovanovin sulkeet	85
aste		Hopfin solmukon	85
Alexanderin modulin	59	vaillinaiset	76
vapaan modulin	8	hävittäjä	8
		hävitysoperaattori	82
B		I	
Bézout’n yhtälö	4	ideaali	3
D		identiteettinuoli	9
diffeomorfismi	42	identiteettipiena	77
differentiaali	17	identiteettiylinuoli	12
raamin	33	immersio	50
E		indusoitu homomorfismi	45
epäsolmu	50	indusoitu ketjukuvaus	30
Eukleideen kuvaus	5	indusoitu suunta	25
Eukleideen rengas	5	J	
Eulerin–Poincarén tunnus		jakaja	3
porrastettu	76	aito	3
raamin	34	Jonesin polynomi	67
F		Hopfin solmukon	67
Frobeniuksen algebra	82	uudelleen vakioitu	70
perinteinen muoto	81	K	
Frobeniuksen ehto	82	kaksoislineaarimuoto	81
Frobeniuksen piste	82	eheä	81
H		kaksoisporrastus	75
Hausdorff	37	kanta	6

kantapisteavaruus	45	loppupiste	15
kartanvaihto	41	luomisoperaattori	82
kartta	40	luonnollinen moduli	6
karttojen yhteensopivuus	41	luonnollinen muunnos	12
kategoria	8	luonnollinen samaistus	13
joukkojen	9, 14	lyhyt tarkka jono	18
järjestettyjen luonnollisien lukujen	79	ketjukompleksien	19
kantapisteavaruuksien	9	M	
ketjukompleksien	18	maalitopologia	37
modulikertoimisien ketjukompleksien	21	moduli	5
pienöjen	79	modulin esitysmatriisi	6
raamien	32	monisto	39
ryhmien	9	moniulotteinen kolmio	22
topologisien avaruuksien	9	moniulotteisen kolmion kuva	25
topologisien avaruusparien	9	monoidinen kategoria	13
vaihdannaisien ryhmien	9	symmetrinen	16
yhden pisteen	12	tarkka	12
Kauffmanin sulkeet	61	monoidipiste	15
uudelleen vakioidut	69	muodollinen raami	32
ketjukompleksi	17	N	
modulikertoiminen	21	neutraalipiste	13
ketjukuvaus	18	n-ketju	25
kiertymä	7	raamin	33
kiertymäalkio	7	Noetherin rengas	6
kiertymäjoukko	7	nuoli	8
kiertymämoduli	7	O	
kiertymätön moduli	7	oios	67
kokonaisalue	3, 5	pystysuuntainen	67
kolmiointi	32	vaakasuuntainen	67
toruksen	32	oioskuutio	68
yleistetty	35	etumerkillinen	83
kolmioryhmä	35	Hopfin solmukon	68
toruksen	36	uudelleen vakioitu	71
kolmiväritettyvyys	51	P	
kongruenssi	10	paikallinen polkuyhtenäisyys	45
korkeussiirto	86	peiteavaruus	43
kunta	5	peitekuvaus	43
kuva		peitemuunnos	45
ketjukompleksin	19	peiteryhmä	46
L		peiteympäristö	43
Laurentin polynomi	59	perusavaruus	43
liitos	9	perusryhmä	11
liittoalkio	3		
lineaarimuoto	81		

piena	77	epäsolmun	57
hyvin käyttäytyvä	79	sieventämätön Jonesin polynomi	65
pienallisuus	79	Hopfin solmukon	66
pienan oikea reuna	77	uudelleen vakioitu	70
pienan vasen reuna	77	sileä kartasto	41
piste (kategorioteoria)	8	sileä kuvaus	42
polkuhomotopia	11	sileä monisto	42
polkuyhtenäisyys	43	sileä rakenne	42
porras	72	silmukkajoukko	11
porrastettu moduli	72	sisus	34
porrastettu rengas	72	sivu	24
porrastettu tensoritulo	73	sivukuvaus	26
porrastettu ulottuvuus	73	skalaarikertolasku	5
porrastettu vaihdannainen ryhmä	72	solmu	49
porrastuksen siirto	75	solmujen samanmuotoisuus	51
porrastus	73	solmukaavio	50
polynomirenkaan	73	solmukko	50
triviaali	72	solmun komplementti	53
projektiylinuoli	12	solmun ryhmä	53
punos	61	solmutunnus	51
puolipaikallinen yhdesti yhtenäisyys ..	45	solu	37
pääideaali	3	soluhomologia	38
pääideaalirengas	4, 5	solukko	38
R		solumuotoinen suodatus	38
raami	32	suhteellinen kolmiohomologia	31
raamikuvaus	32	suodatus	38
ranka	38	suunnattu raami	32
Reidemeisterin siirto	51	suunnattu reuna	25
rengas	5	suuntaus	24
vaihdannainen	5	suurin yhteinen tekijä	4
reuna	25	sykliä ryhmä	21, 28
reunakuvaus	26	syklinen peiteavaruus	57
reunallinen monisto	39	syklinen ryhmä	7
reunojen ryhmä	21, 28	säie	43
risteyksen suunta	64	säännöllinen peiteavaruus	47
risteys	50	T	
oikea	64	tarkka jono	17
vasen	64	taso	
ruutukaavio	55	oioskuution särmän	83
apilasolmun	55	tekijäesitys	4
S		tekijäjoukko	11
Seifertin kierros	55	tekijäkatteoria	10
Seifertin menetelmä	55	tekijäkompleksi	19
Seifertin pinta	55	tekijämoduli	6, 22

tekijöihinjako	4	Ä	
tekijöihinjakorengas	4, 5	äärellissulkeumallisuus	38
termi (ketjukompleksi)	17	äärellisviritteisien modulien rakennelause	8
toiminta		äärellisviritteisien vaihdannaisien ryhmien	
vasen	5	rakennelause	7
topologinen kvanttikenttäteoria	90	ääretön syklinen peiteavaruus	
tulo		epäsolmun komplementin	57
Frobeniuksen algebran	83	solmun komplementin	57
tulokategoria	12		
täysi kolmiokompleksi	28		
täysi separoituvuus	39		
V			
vapaa joukko	6		
vapaa moduli	6		
vapaa vaihdannainen ryhmä	7		
vastamonoidipiste	16		
vastaraja	79		
reaaliavaruuksien	79		
vastatulo			
Frobeniuksen algebran	83		
vastayksikkö			
Frobeniuksen algebran	83		
virittäjä			
pienien kategorian	80		
Wirtingerin esitys	53		
apilasolmun	53		
vyyhde	64		
Y			
ydin			
ketjukompleksin	19		
yhdesti yhtenäisyys	43		
yksikkö	3		
Frobeniuksen algebran	82		
yksinkertainen kolmiohomologia	34		
yleistetyllä kolmioinnilla	37		
yksinkertainen kolmiohomologiaryhmä			
toruksen	37		
yksinkertainen kolmiokompleksi	34		
yleinen kolmiohomologia	30		
yleinen kolmiohomologiaryhmä	28		
yleispeite	44		
ylinuoli	10		
perusryhmän	11		
täysien kolmiokompleksien	30		