Siirtofunktioiden teoria

Jarmo Malinen

Alkusanat

Tämä luentomoniste käsittää lyhyen esityksen H^∞-säätöteoriasta äärellisdimensioisille lineaarisille dynaamisille systeemeille. Esitys seuraa jossain määrin B. Francisin kirjaa *A course in* H_∞ *control theory*, joskin tyylini on osin “algebrallisempi”. Tämän vaikutuksen olen epäilemättä saanut Vidyasagarin kirjasta *Control system synthesis. A factorization approach.*

Haluan lausua lämpimät kiitokset Atte Aallolle, joka suorittaessaan tämän kurssin keväällä 2008 teki oikoluvun tähän luentomonisteeseen.

Notaatiota. Kompleksitasoa merkitään symbolilla $\mathbb{C}$ ja reaaliakselia $\mathbb{R}$. Oikea ja vasen puolitaso ovat $\mathbb{C}_+ := \{s \in \mathbb{C} \mid \Re s > 0\}$ ja $\mathbb{C}_- := \{s \in \mathbb{C} \mid \Re s < 0\}$. Positiivinen ja negatiivinen reaaliakseli ovat $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ja $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$. Imaginääriakselia merkitään $i\mathbb{R}$. Avoin yksikkökiekko on $\mathbb{D}$ ja sen reuna, yksikköympyrä, on $\mathbb{T}$. Luonnolliset luvut ovat $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$. Kokonaislukuja merkitään $\mathbb{Z}$ ja ei-negatiivisia kokonaislukuja $\mathbb{Z}_+$. Edelleen $\mathbb{Z}_- := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+$.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ mielivaltainen. Silloin $\mathbb{C}^n$ ja $\mathbb{R}^n$ merkitsevät n-ulotteisia pystyvektoreita, joiden komponentit ovat avaruuksissa $\mathbb{C}$ ja $\mathbb{R}$. Jatkuvien, $\mathbb{C}^n$-arvoisten funktioiden perheitä joukoilla $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}_+$ merkitään symboleilla $C(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ ja $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^n)$. Niiden jatkuvien funktioiden, jotka lähestyvat nollaa äärettömyydessä, merkitään $C_0(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$. Edelleen niiden funktioiden $f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ luokkaa merkitään $C_{c-}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$, joilla $f(t) = 0$ kaikilla $t < T_f$ eräällä $T_f > -\infty$. Jos $k \in \mathbb{N}$, niin $C^k(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ on niiden $\mathbb{C}^n$-arvoisten funktioiden perhe, joiden k ensimmäistä derivaattaa on jatkuvia.

Muuta notaatiota otetaan käyttöön sitten kun tarvitaan.

1. Johdanto

Tarkastellaan peruskäsitteitä kuten signaaleja ja lineaarisia, aikainvariantteja "mustia laatikoita". Muutama sana aikainvarianssista ja stabiilisuudesta, sekä takaisinkytkentään perustuvasta säädöstä.

1.1. Lineaarisuus, aikainvarianssi, kausaalisuus. Olkoon $m, p \in \mathbb{N}$ mielivaltaisia. Merkitään $\mathbb{C}^m$-arvoisten, reaaliluvuilla $\mathbb{R}$ jatkuvien funktioiden vektoriavaruutta symbolilla $C(\mathbb{R}; C^m)$. Olkoon $G : C(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m) \to C(\mathbb{R}; \mathbb{C}^p)$ lineaarinen kuvaus, eli jokaisella $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ja $u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ pätee

$$G(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 G u_1 + \lambda_2 G u_2.$$

Tällaista kuvausta G voidaan kutsua *jatkuvan ajan lineaariseksi mustaksi laatikoksi*, ja vektoriarvoisia funktioita u_1 ja u_2 laatikkoon sisäänmeneviksi *signaaleiksi*. Funktio $Gu_1 \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C}^p)$ on laatikosta ulostuleva signaali. Puhutaan myös *syötteestä* ja *vasteesta*, sekä Suomen kieltä raiskaten *inputista* ja *outputista*. Oletamme matemaattisen yksinkertaisuuden vuoksi, että signaalit ovat jatkuvia reaaliparametrinsa $t \in \mathbb{R}$ funktioita, jota parametria tulee ajatella *jatkuvana aikana*. Mikäli parametrijoukkona käytettäisiin kokonaislukuja $\mathbb{Z}$, voitaisiin tehdä samankaltaisia tarkasteluja, mutta puhuttaisiin *diskreetistä ajasta*.

Että laatikko on musta, viittaa siihen että emme pysty näkemään sen sisäistä rakennetta minkäänlaisella taskulampulla tai tähystimellä. Kyseessä ei ole mikään mustan laatikon (s.o. lineaarisen kuvauksen G) matemaattinen ominaisuus ("pimeys?"), vaan pelkästään tapa kuvata olematonta tietoamme erään lineaarisen kuvauksen G rakenteesta. Emme kykene muuhun kuin valitsemaan syötteen u ja mittaamaan vasteen Gu ilman virhettä. Insinöörin kannalta tämäkin on aika paljon oletettu.

Aikatranslaatio τ^h, $h \in \mathbb{R}$ on lineaarinen kuvaus kaikilla signaaleilla joukossa
$C(\mathbb{R}; C^m)$, joka määritellään

$$\left(\tau^h u\right)(t) = u(t+h).$$

Jos $h > 0$, kyseessä on selvästi translaatio ajassa taaksepäin, mikäli aikaparametrin t positiiviset arvot (kuten tapana on) sovitaan vastaavan tulevaisuutta. Mikäli edellä määritelty musta laatikko G toteuttaa

$$\left(G\tau^h u\right)(t) = \left(\tau^h (Gu)\right)(t) = (Gu)(t+h) \quad \text{kaikilla} \quad h, t \in \mathbb{R},$$

sanotaan että G on lisäksi *ajasta riippumaton* eli *aikainvariantti*. Operaattorikielellä tämä kirjoitetaan lyhyemmin kommutaatioehtona $G\tau^h = \tau^h G$ kaikilla $h \in \mathbb{R}$. Huomaa että aikainvariantin mustan laatikon (meille täysin tuntematon) sisäinen rakenne saattaa hyvinkin "elää" ajan mukana — tai olla elämättä. Aikainvarianssista seuraa, että ei ole mitään keinoa varmentaa asiaa suuntaan tai toiseen tekemällä mittauksia laatikon ulostulosta $G\left(\tau^h u\right)$ eri tavoin viivästetyillä, mutta muutoin identtisillä syötteillä $\tau^h u$ eri arvoilla $h \in \mathbb{R}$, mutta kiinteällä $u \in C(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$.

TEHTÄVÄ 1. *Osoita esimerkillä, että lineaarisen, aikainvariantin mustan*
laatikon G sisäinen rakenne (jota siis emme oikeasti voi tietää) voi olla ajasta riippuva.

Mustan laatikon G *kausaalisuudella* tarkoitetaan sitä, että muutokset tulevassa syötteessä $u(t)$, $t \geq t_0$, eivät voi vaikuttaa menneisyydessä saatuun vasteeseen $(Gu)(t)$, $t < t_0$. Matemaattisemmin, jokaisella $t_0 \in \mathbb{R}$ pätee

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \text{kaikilla} \quad t < t_0 \Rightarrow (Gu_1)(t) = (Gu_2)(t) \quad \text{kaikilla} \quad t < t_0.$$

Lineaarisessa tapauksessa voidaan kirjoittaa ekvivalentisti

$$u(t) = 0 \quad \text{kaikilla} \quad t < t_0 \Rightarrow (Gu)(t) = 0 \quad \text{kaikilla} \quad t < t_0$$

jokaisella $t_0 \in \mathbb{R}$. Aikainvariantissa tapauksessa on luonnollisesti riittävää vaatia ehdot pelkästään tapauksessa $t_0 = 0$.

Pelkästään lineaarinen, aikainvariantti ja kausaalinen musta laatikko G on erittäin yleinen objekti, eikä siitä voida sanoa kovin paljoa sovellutuksien kannalta relevanttia. Tilanne muuttuu olennaisesti, jos tiedetään että pienet muutokset sisäänmenevässä signaalissa u aiheuttavat vain pieniä muutoksia ulostulevassa signaalissa Gu. Tällöin G olisi siis jossain mielessä jatkuva kuvaus. Niinpä tarvitaan jonkinlainen määritelmä sille, mitä pienellä muutoksella tarkoitetaan. Varsin yleinen tapa on normittaa signaalien vektoriavaruus $C(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ neliösumman mielessä

$$||u||^2_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)} := \int_{-\infty}^{\infty} ||u(t)||^2_{\mathbb{C}^m}\, dt,$$

jossa $||u||^2_{\mathbb{C}^m} := \sum_{j=1}^m |u_j|^2$. Tämä normin valinta on matemaattisesti miellyttävää, koska se antaa signaaliavaruudelle $C(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ sisätuloavaruuden rakenteen. Fysikaalisesti $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$-normi vastaa signaalin kokonaisenergiaa. Mikäli on olemassa vakio $C < \infty$ siten että kaikilla $u \in C(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$

$$||Gu||_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^p)} \leq C||u||_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)} \tag{1}$$

sanotaan että G:llä on *äärellinen energiavahvistus*, ja että se on *input/output-stabiili* tai lyhyemmin *I/O-stabiili*. G:lle määritellään normi asettamalla

$$||G||_\infty = \sup_{||u||_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)}=1} ||Gu||_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^p)}. \tag{2}$$

Oltaisiin luonnollisesti voitu käyttää erilaisia painofunktioita $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$-normin määrittelyssä, jolloin oltaisiin saatu suurempia luokkia "stabiileja" mustia laatikoita.

Huomattakoon ettei ole olemassa mitään yksittäistä universaalia tapaa määritellä mitä "pieni muutos" signaalissa u tarkoittaa, koska pieni muutos saattaa olla toisessa merkityksessä hyvinkin iso. Tästä voidaan antaa esimerkki:

Esimerkki 2. *Olkoon $h > 0$ mielivaltaisen pieni. Tällöin on olemassa signaali $u \in C(\mathbb{R};\mathbb{C})$ signaali siten että h:n kokoinen viive vie sen kakkosen päähän itsestään supremum-normin mielessä*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |(\tau^h u)(t) - u(t)| = 2. \tag{3}$$

Ota esimerkiksi $u(t) = \sin(t \log(|t|+1))$. Intuitiivisesti olisi kuitenkin kohtuullista ajatella, että mielivaltaisen pienet viiveet eivät voi edustaa suuria muutoksia. Onkin totta, että jos vaadimme lisäksi, että $u \in C_0(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)$, tällöin yhtälön (3) supremum-lauseke $\to 0$ kun $h \to 0$. Samoin, jos oletamme että $||u||_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})} < \infty$, niin silloin jopa

$$\lim_{|h|\to 0} ||\tau^h u - u||_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})} = 0.$$

Olkoon G nyt lineaarinen, aikainvariantti, äärellisesti energiaa vahvistava musta laatikko. Tulee huomata, että mustan laatikon sisäistä kompleksisuutta ei ole rajoitettu millään tavalla. Esimerkiksi jos kyseessä olisi täysin lineaarisista komponenteista koottu lineaarinen vahvistin (oikeammin: sellaisen vahvistimen input/output-kuvaus), sen komponenttien lukumäärää ei olisi mitenkään rajoitettu — siinäkään tapauksessa, että laitteesta ei voitaisi ottaa pois yhtäkään komponenttia input/output-kuvausta muuttamatta. Itseasiassa, eräässä mielessä "komponenttien" lukumäärä voisi olla ääretön. Voitaisiin antaa vaikkapa lämmönjohtuvuusyhtälöön perustuva esimerkki, jossa jokaiseen avaruuden matemaattiseen pisteeseen liittyisi infinitesimaalisen pieni "komponentti". Tällöin olemme tekemisissä *ääretönulotteisien systeemien* ja nk. *jakautuneiden järjestelmien* kanssa, mutta emme käsittele niitä näillä luennoilla.

1.2. Mustan laatikon sisäisestä rakenteesta. Tarkastelemme seuraavassa erästä useissa sovellutuksissa ensiarvoisen tärkeää käytännön tehtävää, nimittäin mustan laatikon avaamista. Tämän tehtävän ratkaisu on selvästi apriorinen mahdottomuus[1], ja niinpä sen tutkimiseen on käytetty säästelemättä henkisiä, rahallisia ja materiaalisia resursseja. Tämä on tietenkin inhimillisesti ottaen täysin ymmärrettävää,

[1] Jos musta laatikko voitaisiin avata, se ei olisi musta.

koska tehtävän onnistuneesti ratkaissut voi sangen perustellusti odottaa rikastuvansa esim. osake- ja johdannaismarkkinoilla huomattavan nopeasti.

Lineaarisen mustan laatikon "avaamiseen" on kehitetty koko joukko menetelmiä, jotka kuuluvat nk. *systeemi-identifikaatioteorian* piiriin. Nimi viittaa siihen, että ikään kuin mustan laatikon sisältä haluttaisiin "identifioida" systeemi, joka on sinne piilotettuna ja jota emme pelkästään käytännöllisistä syistä pysty suoraan näkemään.

Kaikissa systeemi-identifikaatiomenetelmissä mustaan laatikkoon syötetään erilaisia signaaleita, valkoista kohinaa tms.. Ulostuloa havaitsemalla pyritään rakentamaan matemaattisia malleja, jotka selittäisi jossain mielessä optimaalisesti havaitun käytöksen. Käytetyt matemaattiset mallit ovat yleensä (stokastisen tai tavanomaisen) differentiaaliyhtälön muotoa, josta esimerkkinä yhtälö

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad \text{kaikilla} \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4}$$

joka tulee meille hyvin tutuksi myöhemmin. Kaavassa (4) A, B, C ja D ovat sopivia lineaarisia kuvauksia sopivissa vektoriavaruuksissa. Yhtälöä (4) kutsutaan G:n *tila-avaruusmalliksi* tai *reaalisaatioksi*, mikäli $y = Gu$ jos ja vain jos u ja y toteuttavat yhtälön (4). Palaamme tarkemmin tähän myöhemmin.

Ei pidä kuitenkaan luulla, että musta laatikko G olisi "oikeasti" avattu vaikka sen edustama input/output -kuvaus voitaisiinkin virheettömästi selittää erään muotoa (4) olevan differentiaaliyhtälön avulla.

Tehtävä 3. *Osoita esimerkillä, että lineaarinen, aikainvariantti musta laatikko saattaa koostua aikainvarianteista, mutta aidosti epälineaarisista komponenteista. Onko mahdollista rakentaa epälineaarinen musta laatikko, lineaarisista komponenteista?*

Itse asiassa sähköinsinöörit ovat kautta aikojen (tai ainakin viime vuosisadalla) pyrkineet rakentamaan lineaarisia laitteita epälineaarisista komponenteista, ja he ovat olleet siinä huomattavan menestyksekkäitä. Niinpä reaalisaation (4) rakenteella (joka viime kädessä palautuu lineaaristen kuvausten A, B, C ja D rakenteeseen) ei tarvitse olla mitään tekemistä mustan laatikon sisuskalujen kanssa. Siitä huolimatta reaalisaatiosta saattaa olla huomattavasti käytännön hyötyä, koska sitä voidaan manipuloida matemaattisesti helpommin kuin pelkkää kokoelmaa mustasta laatikosta saatua mittausdataa. Voisi sanoa että reaalisaatio on käyttökelpoinen tapa kompressoida mittausdataa.

Eräissä tapauksissa meillä on fysikaalisesti perustellut syyt olettaa, että G:n sisäinen rakenne on itse asiassa differentiaaliyhtälön (4) muotoa. Tällöin G ei tarkkaan ottaen ole musta laatikko. Esimerkkinä annettakoon lämmönjohtumistehtävä levyssä

$$L := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad 0 < u, v < 1\right\}$$

, jota lämmitetään osalta reunaa (input) ja lämpötilaa mitataan toiselta osalta reunaa (output). Levy L koostuu sekalaisesta aineesta, ja lämmönjohtumiskerroin on siis paikan funktio. Levyn lämpötilajakaumaa $x(t,u,v)$ mallitetaan lämpöyhtälöllä

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t,u,v) = \nabla \cdot (\sigma(u,v)\nabla)\, x(t,u,v) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad 0 < u, v < 1.$$

Tässä $\sigma(u,v)$, $(u,v) \in L$, on tuntematon lämmönjohtavuusjakauma, ja B on tunnettu reunakontrollioperaattori. Malli on yhtälön (4) muotoa ja tunnettu muutoin, paitsi funktion $\sigma(u,v)$ osalta. Funktion $\sigma(u,v)$ konstruoiminen reunakontrollista u ja mittausdatasta on nk. *käänteinen ongelma.*

Tehtävä 4. *Ajatellaan ideaalisia radio- ja televisiovastaanottimia*[2] *Olemme pelkästään kiinnostuneita antennista tulevan input-signaalin ja kaiuttimista tai kuvaputkesta tulevan output-signaalin välisestä suhteesta, jota pidämme mustana laatikkoina R ja T. Tarkastele, missä mielessä R, T ovat lineaarisia, aikainvariantteja, ja onko niillä äärellinen energiavahvistus. Voidaanko R ja T koota pelkästään lineaarisista komponenteista?*

1.3. Säätö takaisinkytkennällä. Kahdesta mustasta laatikosta G_1 ja G_2 on helppoa rakentaa kolme muuta rinnan ja sarjaankytkemällä, mikäli vektoriarvoisten signaalien dimensiot sen vain sallivat. Kyseessä on itse asiassa vain kuvausten yhteenlasku $G_1 + G_2$ ja kompositiot G_1G_2 sekä G_2G_1, jossa tarvitsee vain huolehtia siitä ko. operaatiot ovat matemaattisesti järkeviä. Selvästi, mikäli G_1 ja G_2 ovat molemmat lisäksi lineaarisia (aikainvariantteja), niin on myös $G_1 + G_2$ ja G_1G_2 sekä G_2G_1.

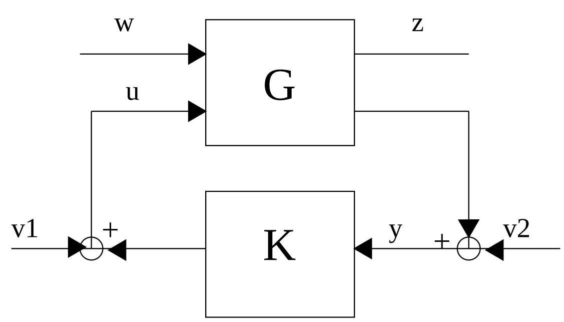
Hieman mielenkiintoisempaan rakenteeseen pääsemme käsiksi tarkastelemalla *takaisinkytkentöjä.* Takaisinkytkentä tarkoittaa luonnollisesti sitä, että osa laatikon ulostulosta kytketään tiettyjen muunnosten jälkeen takaisin laatikon sisääntuloon. Takaisinkytkennän käyttö tekniikan säätötarkoituksissa lienee ikivanhaa, ja jo höyrykoneiden aikakaudella mekaanisten takaisinkytkentäsäätäjien (regulaattoreiden) käyttö

[2]Ei kuitenkaan mitään digivastaanottimia, ja oletamme että ne ovat olleet aina olemassa ja päällä. Ideaalisuus ymmärretään niin, että laitteiden oletetaan toimivan täsmälleen spesifikaatioidensa mukaisesti, vaikka ohjelma olisikin huonoa. Meidän ei ole tarpeen tuntea näitä spesifikaatioita tarkalleen.

oli oma taiteenlajinsa. Samalla periaatteella toimivat mm. mekaaniset sytytysennakon säätäjät auton moottoreissa.

Tieteellisemmälle pohjalle takaisinkytkentäajattelua oli nostamassa 1940-luvulla mm. N. Wienerin koulukunta. Silloin kehittyi *kybernetiikaksi* nimetty tieteenhaara. Kybernetiikan uskottiin olevan ratkaisu biologian ja älyn ongelmiin, mutta nämä asiat osoittautuivat myöhemmin jonkin verran komplisoituneemmiksi. Wiener on kirjoittanut tästä aiheesta kirjan *Cybernetics: Or the Control and Communication in the Animal and the Machine*, josta käy ilmi se innostus, joka tutkijapiireissä oli vallalla niihin aikoihin.

Olkoon G ja K lineaarisia mustia laatikoita. Ajatellaan G:n vektoriarvoiset sisääntulo ja ulostulo jaetuksi kahdeksi signaaliksi siten, että seuraavan diagrammin ympyrällä merkityt summausliitokset ovat järkeviä. Summausliitoksiin sekä mustiin laatikoihin tulevat nuolet osoittavat signaalin kulkusuuntaa. Kyseessä on selvästi takaisinkytkentä, jossa osa



KUVA 1. Takaisinkytkentäkaavio

G:n ulostulosta on kytketty *säätäjän* K kautta osaan sisäänmenoja. Signaalit v_1 ja v_2 ovat *ulkoisia häiriösignaaleja*. Käytännössä on aika paljon vaadittu, että nämä ulkoiset häiriösignaalit olisivat jatkuvia, mutta oletettakoon kuitenkin niin. Hajottamalla G 2×2-lohkomatriisiksi signaalien hajotelman mukaan, saadaan

$$\begin{bmatrix} z \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Käyttämällä summausliitosten yhtälöitä

$$\begin{cases} y = z_2 + v_2, \\ u = Ky + v_1. \end{cases}$$

saadaan

$$\begin{bmatrix} I & -G_{12} & 0 \\ 0 & I & -K \\ 0 & -G_{22} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ G_{21} & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Vahvempien oletusten vallitessa yhtälön vasemmalla puolella oleva lohkomatriisin määrittämä lineaarikuvaus on kääntyvä jatkuvien signaalien avaruudella. Tällöin signaalit z, u ja y saadaan lausuttua signaalien w, v_1 ja v_2 avulla. Tämä kuvaus on eräänlainen "musta laatikko" sekin, paitsi että tiedämme sen sisäisestä rakenteesta sen olevan *suljetun loopin* muotoa eräälle takaisinkytkentäjärjestelylle. On selvää että kyseessä on lineaarinen (aikainvariantti) musta laatikko, mikäli molemmat G ja K ovat lineaarisia (aikainvariantteja).

TEHTÄVÄ 5. *Laske kuvauksen* $[w \quad v_1 \quad v_2] \mapsto [z \quad u \quad y]$ *lohkomatriisiesitys lineaarisessa tapauksessa, olettaen että* $G_{22} = 0$. *Entä jos* $G_{22} \neq 0$*?*

MÄÄRITELMÄ 6. *Olkoon G ja K lineaarisia, aikainvariantteja mustia laatikoita, joille yllä oleva suljetun loopin kaavio on määritelty. Mikäli kuvaus* $[w \quad v_1 \quad v_2] \mapsto [z \quad u \quad y]$ *on I/O-stabiili kaavan (1) mielessä, sanotaan että K on* stabiloiva säätäjä *G:lle.*

Stabilointitehtäväksi kutsutaan kaikkien stabiloivien säätäjien K joukon parametrisointia[3] yhtälön (5) mukaan lohkotulle G:lle. Ratkaisemme tämän tehtävän myöhemmin äärellisdimensioisten systeemien tapauksessa.

Erityisen kiinnostava on se lineaarinen kuvaus G_K, joka kuvaa $w \mapsto z$. Suoralla laskulla saadaan

$$G_K = G_{11} + G_{12}K\,(I - G_{22}K)^{-1}\,G_{21},$$

olettaen että $I - G_{22}K : C(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{p_2}) \to C(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{p_2})$ on bijektio.

Olkoon lineaarinen ja aikainvariantti G yhtälön (5) mukaan lohkotussa muodossa. *Standarditehtäväksi* tai *nelilohko-ongelmaksi (Four block problem)* kutsutaan sellaisen stabiloivan säätäjän K löytämistä, jolle yhtälön (2) antama normi $||G_K||_\infty$ on pienin mahdollinen.

Suboptimaalisesta tehtävästä puhutaan silloin, kun tehtävänä on parametrisoida kaikki stabiloivat säätäjät K, joille $||G_K||_\infty < \gamma$, missä $\gamma > 0$ on ennalta annettu vakio. Ratkaisemme tämänkin tehtävän myöhemmin äärellisdimensioisten systeemien tapauksessa skalaarisignaaleilla.

[3] Parametrisointi tarkoittaa intuitiivisesti jonkin matemaattisesti järjellisen joukon P keksimistä, ja sellaisen (jatkuvan) bijektion ϕ löytämistä joukolla P, jolla $\phi(P)$ on täsmälleen haluttujen säätäjien joukko.

2. Jatkuvan ajan lineaariset tila-avaruussysteemit

2.1. Cauchy-ongelma. Satunnainen matkailija kohtaa harvemmin edellä esitettyjä “mustia laatikoita” sinänsä [4], vaan yleensä mokomat lineaariset kuvaukset on annettu matemaattisten yhtälöitten muodossa.

Nämä yhtälöt ovat tyypillisimmin muodoltaan integraali-, differentiaali tai jopa integrodifferentiaaliyhtälöitä kun työskennellään jatkuvassa ajassa. Diskreetissä ajassa luonnolliset yhtälöt ovat differenssiyhtälöitä. Nämä yhtälöt — silloin kun niillä voidaan osoittaa olevan yksikäsitteisiä ratkaisuja — määrittelevät *dynaamisia systeemejä*. Dynaamisten epälineaaristen sekä lineaaristen systeemien teoria on noin vuosisadan ikäinen, valtavan laaja ja edelleen nopeasti etenevä matematiikan osa-alue, joka on saanut paljon vaikutteita ongelmiinsa sekä fysiikan että insinööritieteitten puolelta.

Tällä kurssilla tarkastelemme erästä pientä mutta sovellutuksissa erittäin tärkeää osaluokkaa systeemejä, nimittäin äärellisulotteisen tila-avaruuden lineaarisia, aikainvariantteja systeemejä. Kiinnostus tällaisiin systeemeihin lienee niinikään toista sataa vuotta vanhaa, mutta teoria alkoi kehittyä nopeasti 1940- ja 1950-luvuilla. Syynä tähän oli lähinnä uusien matemaattisten suunnittelutyökalujen tarve analogisessa elektroniikassa ja säätötekniikassa.

Tarkastellaan yleistä matriisidifferentiaaliyhtälöä

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{6}$$

jossa A on $n \times n$-matriisi ja B on $n \times m$-matriisi. Parametri t on *aikamuuttuja*. Vektori $x_0 \in \mathbb{C}^n$ on *alkutila* hetkellä $t = 0$. Differentiaaliyhtälö (6) on laadultaan *alkuarvo- eli Cauchy-ongelma*. Funktiota $u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$ kutsutaan *syöte eli “inputiksi”*, ja se on määritelty kaikilla positiivisilla ajanhetkillä $t \geq 0$. Mikäli on olemassa jatkuvasti derivoituva funktio $x \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^n)$ joka toteuttaa yhtälön (8) kaikilla $t \geq 0$, kutsutaan tällaista funktiota syötettä u vastaavaksi *tilatrajektoriksi*. Vektoriavaruutta $\mathbb{C}^n$ jossa tilatrajektori x “elää” kutsutaan luonnollisesti *tila-avaruudeksi*. Kokonaislukua n kutsutaan *tila-avaruuden dimensioksi*.

[4]...ja vaikka kohtaisikin, niin mistä tietäisi kohdanneensa? Missä mielessä on olemassa “pelkkiä” lineaarisia operaattoreita, joilla ei ole muita ominaisuuksia kuin lineaarisuus? Ja onko olemassa “mies ilman ominaisuuksia”?

Käytännön sovellutuksissa ei voida yleensä olettaa, että tilatrajektori x olisi havaittavissa suoraan, vaan pelkästään erään havaintoyhtälön

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad t \geq 0, \tag{7}$$

kautta. Tässä C on $p \times n$-matriisi ja D on $p \times m$-matriisi. Funktiota y kutsutaan *ulostuloksi eli "outputiksi"*. Yhtälöt (6) ja (7) muodostavat yhdessä yhtälösysteemin

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{8}$$

Differentiaaliyhtälösysteemin matriisinelikkoa $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ kutsutaan lineaariseksi, aikainvariantiksi, jatkuvan ajan *systeemiksi*. Matriisien dimensiot ovat seuraavasti: A on $n \times n$, B on $n \times m$, C on $p \times n$ ja D on $p \times m$. Matriiseilla on nimetkin: A on *(puoliryhmän) generaattori*, B *on kontrollioperaattori*, C *on havainto-operaattori* ja D *on läpisyöttöoperaattori*. Yhteisellä nimellä operaattoreita A, B, C ja D kutsutaan systeemin *generoiviksi operaattoreiksi*. Koska tila-avaruuden dimensio n on äärellinen, kutsutaan systeemiä *äärellisulotteiseksi*.

Mikäli syöte $u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$, nähdään että yhtälöllä (8) on ratkaisu, joka löydetään esim. vakioitten variointimenettelyllä.

Propositio 7. *Olkoon matriisinelikko* $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ *ja* $x_0 \in \mathbb{C}^n$ *mielivaltaisia. Olkoon* $u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$. *Tällöin Cauchy-ongelmalla (8) on yksikäsitteinen ratkaisu, jota vastaa tilatrajektori*

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-q)A}Bu(q)\, dq. \tag{9}$$

Tilatrajektori toteuttaa $x \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^n)$ *ja ulostuleva signaali toteuttaa* $y \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p)$.

Todistus. Yhtälö (9) voidaan kirjoittaa muotoon

$$x(t) = e^{tA}\left(x_0 + \int_0^t e^{-qA}Bu(q)\, dq\right),$$

jossa integraalin sisällä oleva funktio $q \mapsto e^{-qA}Bu(q)$ on jatkuva, koska u on oletettu jatkuvaksi. Mutta jatkuvan funktion integraalifunktio on jatkuvasti derivoituva, joten $x \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^n)$. Niinpä x voidaan derivoida, ja laskettaessa derivaatta $x'(t)$ havaitaan, että se toteuttaa differentiaaliyhtälön (6). Koska $u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$ ja $x \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^n) \subset C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^n)$, selvästi $y := Cx + Du \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p)$. $\square$

2.2. Systeemi ratkaistussa muodossa. Proposition 7 perusteella systeemi $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ määrittelee siis kuvauksen $(u, x_0) \mapsto y$, jonka antaa kaava

$$y(t) = Ce^{tA}x_0 + \int_0^t Ce^{(t-q)A}Bu(q)\,dq + Du(t).$$

Määrittelemällä lineaariset operaattorit $\mathcal{C} : \mathbb{C}^n \to C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p)$

$$(\mathcal{C}x_0)(t) := Ce^{tA}x_0 \quad \text{kaikilla} \quad t \geq 0$$

ja $G_+ : C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m) \to C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p)$

$$(G_+u)(t) := \int_0^t Ce^{(t-q)A}Bu(q)\,dq + Du(t) \quad \text{kaikilla} \quad t \geq 0$$

voidaan kirjoittaa $y = \mathcal{C}x_0 + G_+u$. Edelleen, määrittelemällä jokaiselle $t \geq 0$

$$\mathcal{B}^t u := \int_0^t e^{(t-q)A}Bu(q)\,dq$$

voidaan lausua $x(t) = e^{tA}x_0 + \mathcal{B}^t u$ kaikilla $t \geq 0$. Näillä lineaarisilla kuvauksilla on nimetkin.

Määritelmä 8. *Olkoon $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ jatkuvan ajan systeemi. Tällöin $\mathcal{B}^t : C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^n$ on kontrolloitavuusoperaattori (controllability map), $\mathcal{C} : \mathbb{C}^n \to C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p)$ on havaittavuusoperaattori (observability map), ja G_+ on (I/O -kuvauksen) Toeplitz-operaattori.*

Karkeasti sanoen kontrolloitavuusoperaattori kuvaa menneen ajan syötteet nykyhetken tilalle, kun alkutila jossain äärettömän kaukana menneisyydessä on oletettu nollaksi. Havaittavuusoperaattori kuvaa nykyhetken tilan tulevaisuuden ulostulolle, mikäli tulevaisuudessa systeemin syöte oletetaan nollaksi.

Jos kontrolloitavuusoperaattori on määritelty kuten Määritelmässä 8, tarvitaan kokonainen perhe operaattoreita $\mathcal{B}^t$, $t \geq 0$. Voitaisiin tulla myös toimeen yhdellä operaattorilla, jota voitaisiin ehkä oikeutetummin kutsua kontrolloitavuusoperaattoriksi. Koska integraali

$$\mathcal{B}v := \int_0^\infty e^{qA}Bv(-q)\,dq$$

suppenee ja määrittelee operaattorin $\mathcal{B} : C_{c-}(\mathbb{R}_-; \mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^n$, voidaan kirjoittaa $\mathcal{B}^t u = \mathcal{B}\tau^t u$ kaikilla $t \geq 0$ ja $u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$, $u(0) = 0$.

Jatkuvan ajan systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ Toeplitz-operaattori G_+ määrittelee itse asiassa yksikäsitteisesti erään lineaarisen, translaatio- ja aikainvariantin, kausaalisen kuvauksen $G : C_{c-}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m) \to C_{c-}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^p)$. Olkoon $u \in C_{c-}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ mielivaltainen, ja olkoon $t_0 \in \mathbb{R}$ niin pieni, että $u(t) = 0$ kaikilla $t \leq t_0$. Silloin $\tau^{t_0} u \in C_{c-}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$[5], ja voidaan määritellä vektori $Gu := \tau^{-t_0} G_+ \tau^{t_0} u$. Osoittautuu, että näin saatu Gu on riippumaton t_0:n arvosta kunhan se on vain riittävän lähellä $-\infty$:tä.

Tehtävä 9. *Osoita, että yllä esitetty G_+:n laajennus G on hyvin määritelty, lineaarinen, translaatio- ja aikainvariantti, sekä kausaalinen. Kuinka Toeplitz-operaattori G_+ lausutaan laajennuksensa G avulla?*

Oltaisiin voitu myös edetä suoraan määrittelemällä Cauchy–ongelma (8) syötteestä $u \in C_{c-}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ riippuvalla alkuhetkellä $t_0 \in \mathbb{R}$ sen sijaan, että alkuhetkeksi valittiin $t_0 = 0$ ja syötteet avaruudesta $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$. Alkuhetki t_0 olisi luonnollisesti valittu (syötteestä u riippuen) niin pieneksi, että $u(t) = 0$ kaikilla $t \leq t_0$, ja vastaavana alkuarvona käytettäisiin $x(t_0) = 0$.

Määritelmä 10. *Olkoon $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ jatkuvan ajan systeemi. Tällöin yllä esitetty G_+:n laajennus $G : C_{c-}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m) \to C_{c-}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^p)$ on systeemin* I/O -kuvaus.

Systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ I/O-kuvaus G on siis eräässä mielessä lineaarinen, aika- ja translaatioinvariantti, kausaalinen musta laatikko, paitsi että tiedämme tasan tarkkaan systeemin Σ sisuskalut joista kuvaus G on saanut alkunsa.

Propositio 11. *Olkoon systeemi $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ annettu, ja oletetaan että $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_-$. Silloin Toeplitz-operaattorin G_+ laajennus G on I/O-stabiili, eli on olemassa vakio $C < \infty$ siten että*

$$||Gu||_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^p)} \leq C||u||_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)}.$$

Todistus. Jonkinlaisen ylimalkaisen todistuksen voisi esittää tästä, mutta se ei todellakaan ole ylivoimainen harjoitustehtävänä, matriisitapauksessa. Todistus tulee perustumaan siihen, että matriiseille joilla $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_-$ pätee myös

$$||e^{tA}|| \leq M e^{-rt} \quad t \geq 0$$

eräillä $M < \infty$ ja $r > 0$. Tämä todistetaan helpoimmin matriisin A Jordan-muodon avulla. $\square$

Mikäli edellisen proposition vakio C on löydettävissä, sanotaan että systeemi Σ on *I/O-stabiili.* Mikäli on olemassa vakiot C_1, C_2 siten että

$$\begin{aligned} ||\mathcal{B}u||_{\mathbb{C}^n} &\leq C_1||u||_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)} \quad \text{kaikilla} \quad u \in C(\mathbb{R}_-; \mathbb{C}^m), \\ ||\mathcal{C}x||_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)} &\leq C_2||x||_{\mathbb{C}^n} \quad \text{kaikilla} \quad x \in \mathbb{C}^n, \end{aligned}$$

[5]samaistamalla $C_{c-}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$ sen $C_{c-}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ aliavaruuden kanssa, jonka alkiot häviävät koko negatiivisella reaaliakselilla

sanotaan että Σ on ensimmäisessa tapauksessa *input-stabiili*, ja jälkimmäisessä tapauksessa *output-stabiili*. Mikäli $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_-$, systeemi Σ on sekä input- että output-stabiili, mikä todistetaan olennaisesti samalla tavoin kuin Proposition 11 väite.

Mikäli $\operatorname{range}(\mathcal{B}^t) = \mathbb{C}^n$ jollain $0 < t_1 < \infty$, sanotaan että systeemi on *tarkasti säädettävä* (exactly controllable). Tällöin jokainen tila-avaruuden vektori voidaan saavuttaa äärellisessä ajassa $t = t_1$ valitsemalla sopiva syöte $u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$, alkaen nollatilasta $x_0 = 0$ hetkellä $t = 0$. Mikäli $\ker(\mathcal{C}) = \cap_{t \geq 0} \ker\left(Ce^{At}\right) = \{0\}$, sanotaan systeemiä *tarkasti havaittavaksi* (exactly observable). Tällöin mielivaltaiset kaksi eri alkutilaa x_0 ja x_1, $x_0 \neq x_1$ voidaan erottaa toisistaan mittaamalla ulostuloa korkeintaan äärellisen ajan t_1 verran, olettaen että sisäänmenot pidetään molemmissa kokeissa samoina. Äärellis dimensioisille systeemeille voidaan käyttää nk. *Hautusin kriteeriä*, jonka mukaan matriisiparin (A, B) määrittelemä kontrolloitavuusoperaattori $\mathcal{B}$ on tarkasti säädettävä mikäli lohkomatriisin $[B \quad AB \quad A^2B \cdots A^jB]$ rangi on tilaavaruuden dimensio n jollain riittävän isolla kokonaisluvulla j. Vastaava kriteeri voidaan antaa myös tarkalle havaittavuudelle.

Tarkasti säädettävää ja havaittavaa systeemiä kutsutaan *minimaaliseksi*. Minimaalisen, äärellisulotteisen systeemin tila-avaruuden dimensio on pienin mahdollinen, joka riittää ko. input/output -kuvauksen realisoimiseen. Mielivaltaisesta systeemistä $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ voidaan poistaa “turha osa” tila-avaruutta, jolloin saatu uusi systeemi tulee minimaaliseksi. Reaalisaatioteoriassa ollaan usein kiinnostuneita juuri minimaalisten systeemien konstruoimisesta annetulle mustalle laatikolle G.

3. Laplace- ja Fourier-muunnostekniikoista

3.1. Laplace-muunnos ja siirtofunktiot. On tapana sanoa, että yhtälön (8) määrittelemä lineaarinen dynaaminen systeemi on kirjoitettu *aikatasossa* (time domain). Tällä viitataan vain siihen, että yhtälö on parametrisoitu aikaparametrilla t, ja että annetussa rakenteessa mikään ei viittaa systeemin käytökseen silloin kun siihen syötetään sisään signaaleita u joilla on jaksollinen käytös ajassa. Systeemiä $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ voidaan kuvata ekvivalentisti myös nk. *taajuustasossa* (frequency domain). Tällöin systeemi Σ kirjoitetaan muotoon, jossa sen käyttäytyminen eri taajuuksisilla syötteillä on välittömästi nähtävissä. Taajuustasona ymmärretään kompleksilukualueen $\mathbb{C}$ osajoukkoja, yleisimmin reaaliakselin suunnassa siirrettyjä kopioita oikeasta puolitasosta $\mathbb{C}_+$. Taajuustason elementtejä, jotka siis karkeasti vastaavat eri ”taajuuksia”, merkitään yleensä kompleksimuuttujalla s. Aikatason ja taajuustason välillä liikutaan *Laplace-muunnoksen* avulla.

Määritelmä 12. *Mikäli $u \in C(\mathbb{R}_+; C^m)$ toteuttaa joillain vakioilla $0 \leq \alpha < \infty$, $M < \infty$ ehdon*

$$e^{-\alpha t}||u(t)||_{\mathbb{C}^m} \leq M \quad \textit{kaikilla} \quad t \geq 0 \tag{10}$$

sanotaan, että u on Laplace-muuntuva. Jokaiselle Laplace-muuntuvalle u määritellään Laplace-muunnos funktiona

$$\hat{u}(s) := \int_0^\infty e^{-st} u(t)\, dt \quad \textit{kaikilla} \quad \Re s > \alpha,$$

jossa α toteuttaa estimaatin (10).

Voidaan osoittaa lyhyellä argumentilla, että $\hat{u}$ on argumenttinsa s analyyttinen funktio kaikilla s joilla $\Re s$ on riittävän iso. Jos merkitään yhtälön (10) vakioiden α alarajaa

$$\omega_u := \inf \{\alpha \quad | \quad \sup_{t \geq 0} e^{-\alpha t}||u(t)||_{\mathbb{C}^m} < \infty\},$$

huomataan että $\hat{u}$ on analyyttinen kaikilla s, $\Re s > \omega_u$. Kuvausta $u \mapsto \hat{u}$ (joka on selvästi lineaarinen) merkitään yleensä $\hat{u} = \mathcal{L}\{u\}$. Voidaan osoittaa, että funktion u Laplace-muunnos on nollafunktio ja vain jos u on niin ikään nollafunktio. Mikäli $u \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$ ja sekä u ja sen derivaatta u' ovat Laplace-muuntuvia, saadaan osittaisintegroimalla

$$\hat{u'}(s) = \int_0^\infty e^{-st} u'(t)\, dt = \Big|_0^\infty e^{-st} u(t) + s \int_0^\infty e^{-st} u(t)\, dt = s\hat{u}(s) - u(0), \tag{11}$$

jokaisella s joka toteuttaa $\Re s > \max(\omega_u, \omega_{u'})$. Edellisen kaavan sijoitustermi äärettömyydessä havaitaan häviävän, kunhan raja-arvoa otettaessa käytetään oletusta $\Re s > \omega_u$. Itse asiassa havaitaan kaavasta (11), että $\hat{u}$ ja $\hat{u}'$ voidaan molemmat jatkaa analyyttisesti joukkoon

$\{s \mid \Re s > \min(\omega_u, \omega_{u'})\}$. Tästä ei kuitenkaan seuraa että molemmat funktiot u, u' kasvaisivat olennaisesti samaa eksponentiaalista vauhtia, vaan derivaatta voi kasvaa huomattavasti nopeammin. Esimerkkinä[6] tästä on funktio $u(t) = e^t \sin e^t$, jonka derivaatta kasvaa kuin e^{2t}. Tämä ilmiö ei esiinny diskreetin ajan tarkasteluissa, joissa potenssisarjan ja sen derivaatan suppenemissäteet ovat yhtä suuria.

Laplace-muuntamalla differentiaaliyhtälö (8) saadaan

PROPOSITIO 13. *Olkoon $G_+ : C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m) \to C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p)$ äärellisdimensioisen systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ Toeplitz-operaattori. Nimetään seuraavat väitteet:*

(i) *Funktio $u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$ Laplace-muuntuva, ja $y := G_+ u$, ja*
(ii) *funktio $y \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p)$, on Laplace-muuntuva, ja toteuttaa $y := G_+ u$ eräällä $u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$.*

Tällöin (i) $\Rightarrow$ (ii), ja

$$\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s) \quad \textit{kaikilla} \quad s \in \mathbb{C}, \Re s > \max(\omega_u, \omega_G)$$

jossa $\hat{G}(s) := D + C(s - A)^{-1} B$ ja $\omega_G := \max\{\Re s \mid s \in \sigma(A)\}$. Kääntäen, jos lisäksi D on neliömatriisi ja kääntyvä, niin (ii) $\Rightarrow$ (i).

TODISTUS. Todistetaan implikaatio (i) $\Rightarrow$ (ii) pääpiirteissään. Olkoon u Laplace-muuntuva, jolloin on olemassa vakiot $\alpha \geq 0$ ja $M < \infty$ siten että $||u(t)||_{\mathbb{C}^m} \leq M e^{\alpha t}$ kaikilla $t \geq 0$. Vakioiden variointikaavan (9) integraalitermiä voidaan estimoida

$$\begin{aligned}
&|| \int_0^t e^{(t-q)A} B u(q)\, dq ||_{\mathbb{C}^n} \leq \int_0^t e^{(t-q)\,||A||} ||B||\, M e^{\alpha q}\, dq \\
&= M\, ||B||\, e^{t\,||A||} \cdot \int_0^t e^{(||A|| + \alpha) q}\, dq = \frac{M\, ||B||\, e^{t\,||A||}}{||A|| + \alpha} \left(e^{(||A||+\alpha)t} - 1 \right) \\
&\leq \frac{M\, ||B||\, e^{t\,(2||A|| + \alpha)}}{||A|| + \alpha},
\end{aligned}$$

josta seuraa että trajektori x on niin ikään Laplace-muuntuva. Samoin on sen derivaatta x', koska se toteuttaa differentiaaliyhtälön $x' = Ax + Bu$, jossa yhtälön oikea puoli jo tiedetään Laplace-muuntuvaksi. Laplace-muuntamalla yhtälön molemmat puolet ja käyttämällä derivaatan muunnossääntöä (11) saadaan

$$\hat{x}(s) = (s - A)^{-1} (x_0 + B\hat{u}(s))$$

[6]Esimerkin antoi minulle A. Perämäki, 2002

ensin jossain oikeassa puolitasossa, ja sen jälkeen analyyttisesti jatkamalla joukossa $\{s \in \mathbb{C} \quad | \quad \Re s > \max(\omega_u, \omega_G)\}$. Koska $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ kaikilla $t \geq 0$, saadaan välittömästi

$$\hat{y}(s) = C(s - A)^{-1}(x_0 + B\hat{u}(s)) + D\hat{u}(s).$$

Valitsemalla $x_0 = 0$, toteutuu $y = G_+ u$, jossa tapauksessa $\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s)$.

Käänteisen suunnan todistus perustuu siihen, että jos D^{-1} on olemassa, niin silloin funktio $s \mapsto \hat{G}(s)^{-1}$ on erään äärellisdimensioisen systeemin siirtofunktio. $\square$

Uusille lapsukaisille tarvitaan uusia nimiä, ja niinpä pidetään nyt pienet ristiäiset.

MÄÄRITELMÄ 14. *Olkoon $\hat{G}$ äärellisdimensioinen systeemi $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$.*

(i) *Analyyttistä $p \times m$-matriisiarvoista funktiota $\hat{G}(s) := D + C(s - A)^{-1}B$ kutsutaan systeemin Σ siirtofunktioksi.*
(ii) *Niitä pisteitä $p \in \mathbb{C}$ joiden jokaisessa ympäristössä $\hat{G}(s)$ on rajoittamaton, kutsutaan systeemin navoiksi.*
(iii) *Siirtofunktion (ja myös systeemin Σ) McMillan-asteeksi kutsutaan napojen lukumäärää.*
(iv) *Siirtofunktion geneerinen rangi on kokonaisluku*

$$\nu_G := \max_{s \in \mathbb{C} \setminus \{navat\}} \operatorname{rank} \hat{G}(s),$$

ja nolliksi kutsutaan niitä $z \in \mathbb{C}$ joissa $\operatorname{rank} \hat{G}(z) < \nu_G$.
(v) *Mikäli* $\lim_{|s| \to \infty} \hat{G}(s) = D = 0$, *sanotaan että siirtofunktio on täysin aito (strictly proper).*

Insinöörien kielenkäytössä puhutaan joskus siirtofunktioista, jotka eivät ole minkään systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ siirtofunktioita, vaan pelkästään analyyttisiä (yleensä jopa rationaalisia) funktioita jossain oikeassa puolitasossa. Äärellis- dimensioisen systeemin Σ siirtofunktio toteuttaa aina

$$\lim_{|s| \to \infty} ||\hat{G}(s)|| = ||D|| < \infty,$$

ja tällaista rationaalista siirtofunktiota kutsutaan *aidoksi*. Reaalisaatioteoriassa osoitetaan konstruktiivisesti, että jokainen aito rationaalinen funktio on erään äärellisdimensioisen systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ siirtofunktio. Signaalin derivoimisoperaattoria $D = d/dt$ vastaa (olennaisesti) taajuustasossa kertolasku muuttujalla s, joten derivoimisoperaattorin "siirtofunktio" on siis $\hat{D}(s) = s$. Derivointia ei voi siis erityisesti erittää minkään äärellisdimensioisen systeemin avulla. Tämä on itse asiassa selvää jo Proposition 7 perusteella, koska äärellisdimensioinen systeemi kuvaa jatkuvat syötteet jatkuville vasteille. Derivointi puolestaan haluaa sisäänsä (ainakin kerran) derivoituvia funktioita, joilta se riistää sileyttä tasan yhden derivaatan verran.

Äärellisulotteisen systeemin siirtofunktiolla on tärkeä kompleksisuusominaisuus:

PROPOSITIO 15. *Äärellisdimensioisen systeemin* $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ *siirtofunktion matriisielementit ovat muuttujan* s *rationaalisia funktioita.*

TODISTUS. Kirjoita A Jordan-muotoonsa, ja laske sen avulla ensin resolventti $(s-A)^{-1}$. Tämä voidaan tehdä äärellisellä määrällä matriisien tuloja ja summia, Jordan-lohkojen ja Neumann-sarjan avulla. Seuraa, että resolventtifunktion $s \mapsto (s-A)^{-1}$ jokainen matriisielementti on s:n rationaalinen funktio, koska matriisioperaatiot eivät vie matriisielementtejä ulos rationaalisten funktioiden luokasta. Sama kommentti pätee myös funktiolle $C(s-A)^{-1}B$, ja itse siirtofunktiolle. $\square$

Sellaista matriisiarvoista funktiota $G(\cdot)$, jonka jokainen elementti on rationaalinen kompleksiarvoinen funktio, kutsutaan *rationaaliseksi matriisifunktioksi.* Äärellisdimensioisen systeemin siirtofunktiot ovat siis tällaisia funktioita. Enemmänkin voidaan sanoa.

KOROLLAARI 16. *Olkoon* $\hat{G}$ *analyyttinen funktio jossain vasemmassa puolitasossa. Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) $\hat{G}$ *on äärellisdimensioisen systeemin* $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ *siirtofunktio, ja*
(ii) $\hat{G}$ *on rationaalinen funktio, jolle* $\lim_{|s|\to\infty} ||\hat{G}(s)||_{p\times m} < \infty$.

TODISTUS. Implikaatio (i) $\Rightarrow$ (ii) seuraa suoraan Propositiosta 15. Käänteinen suunta on reaalisaatioteorian perustehtävä, johon palataan myöhemmin. $\square$

Olemme edellä määritelleet äärellisdimensioisen systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ siirtofunktion $\hat{G}(s)$ vertaamalla syötteiden u ja vasteiden y Laplace-muunnoksia keskenään. Vaikka siirtofunktio on määritelty systeemin Σ generoivien operaattoreiden kautta, se riippuu kuitenkin ainoastaan systeemin I/O-kuvauksesta G tai oikeammin vain sen Toeplitz-operaattorista G_+. Huomaa, että Proposition 13 todistus perustuu tekniikaltaan sille, että generoivat operaattorit A, B, C ja D ovat matriiseja. Toeplitz-operaattorilla G_+ on tästä seurauksena se erikoisominaisuus, että se kuvaa Laplace-muuntuvan syötteen u Laplace-muuntuvaksi vasteeksi y. Yleiselle lineaariselle, aika- ja translaatioinvariantille, kausaaliselle mustalle laatikolle G tämän ei tarvitse olla totta.

Tehtävä 17. *Olkoon V kääntyvä $n \times n$-neliömatriisi ja $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ äärellis- dimensioisen systeemi kuten edellä. Osoita että*

$$\Sigma_V = \left[\begin{smallmatrix} V^{-1}AV & V^{-1}B \\ CV & D \end{smallmatrix}\right]$$

on niin ikään äärellisulotteinen systeemi, ja että systeemien Σ ja Σ_V siirtofunktiot ovat samat. Osoita lisäksi että Σ ja Σ_V ovat yhtä aikaa minimaalisia.

3.2. Impulssivaste ja konvoluutio. Olettettakoon, että tiedämme mustan laatikon sisällä olevan lineaarinen, äärellisdimensioinen systeemi $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$, mutta generoivat operaattorit A, B, C ja D eivät ole tiedossa sen enempää kuin siirtofunktio $\hat{G}(s)$. Tehtävän (17) perusteella tiedämme, että Σ:n I/O-kuvaus G ei määrää yksikäsittteisesti systeemiä Σ edes siinä tapauksessa, että sen tiedetään *a priori* olevan minimaalinen. Sen sijaan osoittautuu, että siirtofunktio $\hat{G}(s)$ määräytyy G:stä yksikäsitteisesti. Tämä on itsestään selvää siinä tapauksessa, että signaalit u ja y ovat skalaariarvoisia. Tällöin nimittäin $\hat{G}(s) = \hat{y}(s)/\hat{u}(s)$ mieli- valtaiselle syöte-vasteparille u ja y. Matriisiarvoisessa tapauksessa voidaan menetellä vastaavasti jokaisen $\hat{G}(s)$:n matriisielementin tapauksessa. Valitsemalla testisignaalina käytetty syöte u sopivasti voidaan siirtofunktio löytää vaivattomammin. Ilmenee, että iskunluonteinen syöte saa lineaarisen mustan laatikon paljastamaan "sisimpänsä".

Merkitään δ_0:lla reaaliarvoista *Diracin delta-funktiota* eli yksikkömassa origossa. Kyseessä on itse asiassa nk. distribuutio eikä mikään oikea funktio (jolla olisi mm. arvoja), ja sen määräävä ominaisuus on

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(q)\delta_0(q)\, dq = v(0)$$

jokaisella jatkuvalla funktiolla v. Deltafunktio mallintaa ajassa täydellisesti lokalisoitunutta "iskua" tai "impulssia", jonka energiasisältö on normitettu 1:ksi.

Oletetaan että $u_0 \in \mathbb{C}^m$ on mielivaltainen, ja että Toeplitz-operaattori G_+ on annettu vakioitten variointikaavan

$$(G_+u)(t) := \int_0^t Ce^{(t-q)A}Bu(q)\, dq + Du(t) \quad \text{kaikilla} \quad t \geq 0$$

avulla. Sovelletaan tätä kaavaa syötteeseen $\delta_0 u_0$, jolloin saadaan muodollisesti

$$\begin{aligned}(G_+\delta_0 u_0)(t) &= \int_0^t Ce^{(t-q)A}B\delta_0(q)u_0\, dq + \delta_0(t)Du_0 \\ &= Ce^{tA}Bu_0 + \delta_0(t)Du_0 = \left(Ce^{tA}B + \delta_0(t)D\right)u_0.\end{aligned}$$

Distribuutiota $G(t) := Ce^{tA}B + \delta_0(t)D$ kutsutaan systeemin Σ *impulssivasteeksi*. Merkitsemme sitä samalla kirjaimella kuin systeemin I/O-kuvausta, mutta tarkoittaessamme impulssivastetta laitamme perään aikamuuttujan t. Impulssivaste on funktio, jos ja vain jos $D = 0$ eli systeemin siirtofunktio on täysin aito (ks. Määritelmä (14)).

Lasketaanpa impulssivasteen Laplace-muunnos. Jos $s > \sup_{\alpha\in\sigma(A)} \Re\alpha$, saadaan

$$\int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(Ce^{tA}B + \delta_0(t)D\right)\,dt$$
$$= C\cdot\int_0^\infty e^{-(s-A)t}\,dt\cdot B + D = -C(s-A)^{-1}\Big|_0^\infty e^{-(s-A)t}B + D$$
$$= D + C(s-A)^{-1}B = \hat{G}(s),$$

jossa sijoitustermi äärettömyydessä katoaa mikäli $\Re s$ on jossain oikeassa puolitasossa, riittävän kaukana. Huomaa, että matriisiarvoisen funktion Laplace- muunnoksen laskeminen on vain erikoistapaus vektorin Laplace-muunnoksesta. Ollaan siis melkein todistettu

PROPOSITIO 18. *Äärellisdimensioisen systeemin* $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D\end{smallmatrix}\right]$ *impulssivaste on Laplace-muuntuva funktio, ja sen Laplace-muunnos on systeemin siirtofunktio.*

TEHTÄVÄ 19. *Olkoon A $n\times n$-matriisi. Osoita että jos*

$$\Re s > \max\left(\Re\lambda \quad|\quad \lambda\in\sigma(A)\right)$$

niin silloin $||e^{t(A-s)}|| \to 0$ kun $t\to\infty$. (Vihje: Jordan-muoto.)

Olemme nähneet että ideaalisen mustan laatikon $p\times m$-matriisiarvoinen siirtofunktio voidaan mitata periaatteessa mp mittauksella, syöttämällä sisään sopivasti moduloitua Delta-piikkiä. Tuloksena saadaan impulssivastedistribuution $G(t)$ kaikki mp-matriisielementtiä, jotka siis määräävät periaatteessa siirtofunktion. Käytännössä mokomalla shokkihoidolla toimitetaan musta laatikko vähintäänkin teho-osastolle. Vaikka itse pönttö kestäisikin rynkytystä, deltafunktiota approksimoivan energiapiikin huippu nousisi ehkä niin korkealle, että laatikko ei ehkä olisi enää sellaisilla signaalin arvoilla edes lineaarinen. Impulssivastetta tuskin voidaan mitata useinkaan noin suoraviivaisesti.[7] Siitä huolimatta

[7]Prof. Krasnoselski kertoi Otaniemessä vieraillessaan joskus 90-luvun puolivälissä, että Neuvostoliiton voiman päivinä tehtiin seismisiä kokeita ydinräjähteillä, jotka edustivat aikansa state-of-the-art deltadistribuutioita. Kun deltafunktioiden saatavuus kävi myöhemmin vaikeammaksi, jouduttiin suunnittelemaan uusia testisignaaleja. Päädyttiin jonkinlaisiin kuormaautoilla kuljetettaviin massiivisiin "jyristimiin". Sinällään neuvostoliittolaisen ydinenergiatekniikan perverssi mieltymys deltadistribuutioihin tiedetään jatkuneen ainakin vuoteen 1986 asti.

sillä on tärkeä teoreettinen merkitys, joka seuraa seuraavasta tuloksesta:

PROPOSITIO 20. *Äärellisulotteisen systeemin* $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ *Toeplitz-operaattori voidaan esittää konvoluutiona*

$$(G_+u)(t) = \int_0^t G(t-q)u(q)\,dq,$$

jossa $G(\cdot)$ *on systeemin impulssivaste, ja* $u \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)$ *on Laplace-muuntuva.*

TODISTUS. Edetään formaalisti, ja lasketaan funktion

$$y(t) := \int_0^t G(t-q)u(q)\,dq$$

Laplace-muunnos. Saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-st}\int_0^t G(t-q)u(q)\,dq\,dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-s(t-q)}G(t-q)e^{-sq}u(q)\,dqdt \\
&= \int_0^\infty \int_q^\infty e^{-s(t-q)}G(t-q)e^{-sq}u(q)\,dtdq \\
&= \int_0^\infty \left(\int_q^\infty e^{-s(t-q)}G(t-q)\,dt\right) e^{-sq}u(q)dq \\
&= \int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt \cdot \int_0^\infty e^{-sq}u(q)dq = \hat{G}(s)\hat{u}(s),
\end{aligned}$$

jossa viimeinen askel perustuu Propositioon 18. Koska funktion y Laplace-muunnos toteuttaa $\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s)$, Proposition 13 perusteella päätellään että $y = G_+u$. □

3.3. Fourier-muunnos. Laplace-muuntuva signaali u oli määritelty pelkästään positiivisella reaaliakselilla. Tähän perusteena on se, että mikäli $\Re s > 0$, Laplace-integraalin integrandi $t \mapsto e^{-st}u(t)$ saattaa hyvinkin kasvaa eksponentiaalisesti kun $t \to -\infty$, ellei toisaalta $u(t)$ häviä tai ole ainakin hyvin pieni kun $t \to -\infty$. Laplace-muunnos on meille riittävä työkalu tutkittaessa yhtälön (8) määrittelemää alkuarvo-ongelmaa ja Toeplitz-operaattoria G_+, koska siellä sekä syötteet u että vasteet $y = G_+u$ ovat määritelty vain positiivisilla ajanhetkillä.

Voitaisiin toki määritellä myös nk. kaksipuoleinen Laplace-muunnos kaikille sellaisille $u \in C(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ joille vastaava integraali

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-st}u(t)\,dt$$

suppenee. Esimerkiksi jos $\sup_{t\geq 0} e^{-st}||u(t)||_{\mathbb{C}^m} < \infty$ ja lisäksi $u \in C_{c-}(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$, niin u on selvästi kaksipuolisesti Laplace-muuntuva. Laajennettaessa Toeplitz-operaattori G_+ I/O-kuvaukseksi

$$G : C_{c-}(\mathbb{R};\mathbb{C}^m) \to C_{c-}(\mathbb{R};\mathbb{C}^p)$$

(ks. Määritelmä (10)) tulevat juuri tällaiset signaalit kyseeseen. Eräissä tapauksissa tutkitaan kuitenkin I/O-stabiileja systeemejä $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$, joiden Toeplitz-operaattori G_+ voidaan laajentaa myös sellaisille signaaleille u, jotka eivät välttämättä koskaan täysin häviä mentäessä kohti $-\infty$, mutta joiden "energiasisältö"on sensijaan rajoitettu. Tällaisia signaaleja käsitellään mukavimmin Fourier-muunnoksen avulla, mutta ensin pitää määritellä muutamia uusia signaaliavaruuksia.

Oletamme jatkossa, että lukija tuntee skalaariarvoisten funktioiden Lebesgue-integrointiteoriaa, tai ei nyt ainakaan säikähdä tolkuttomaan tilaan kuullessaan jo aikoja sitten kuolleitten ranskalaisten nimiä. Syynä vaikeamman integrointiteorian käyttöön on se, että joudutaan käsittelemään vakavasti epäjatkuvia signaaleja, joille klassinen Riemanninintegraali ei ole määritelty.

Määritelmä 21. *Olkoon $m \in \mathbb{Z}_+$ mielivaltainen.*

Sanotaan että vektorifunktio $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m$ on Lebesgue-mitallinen, jos sen jokainen komponentti on Lebesgue-mitallinen funktio.

Olkoon $1 \leq p < \infty$ mielivaltainen. Tällöin

$$L^p(\mathbb{R};\mathbb{C}^m) := \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m \text{ Lebesgue-mitallinen ja } \int_{\mathbb{R}} ||u(t)||^p_{\mathbb{C}^m}\, dt < \infty\}.$$

Jokaiselle $u \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ määritellään normi

$$||u||^p_{L^p(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)} := \int_{\mathbb{R}} ||u(t)||^p_{\mathbb{C}^m}\, dt.$$

Joukko $L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ on niiden Lebesgue-mitallisten funktioiden u joukko, joille

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} ||u(t)||_{\mathbb{C}^m} := \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus E} ||u(t)||_{\mathbb{C}^m} < \infty$$

eräällä Lebesgue-nollamitallisella (mahdollisesti tyhjällä) joukolla E.

Kaikissa L^p-avaruuksissa, $1 \leq p \leq \infty$, samaistetaan sellaiset funktiot jotka eroavat toisistaan vain Lebesgue-nollamittaisessa joukossa. Niinpä avaruudet eivät ole oikeastaan funktioiden avaruuksia, vaan ekvivalenssiluokkien avaruuksia.

Kaikki L^p-avaruudet $1 \leq p \leq \infty$ ovat Banach-avaruuksia, ja L^2 on itse asiassa Hilbert-avaruus sisätulolla

$$\langle u_1, u_2 \rangle := \int_{\mathbb{R}} \langle u_1(t), u_2(t) \rangle_{\mathbb{C}^m} \ dt.$$

Usein puhutaan $p \times m$-matriisiarvoisten funktioiden $F(\cdot)$ aliluokasta $L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{p \times m})$, joka määritellään pitämällä näitä matriiseja pelkästään $p \times m$-vektoreina. Miellyttävin normi tälle avaruudelle on

$$||F||_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} ||F(t)||$$

jossa $||F(t)||$ on matriisin $p \times m$-matriisinormi

$$||F(t)|| = \sup_{a \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}} \frac{||F(t)a||_{\mathbb{C}^p}}{||a||_{\mathbb{C}^m}}.$$

Kuten sanottu, jokainen L^p-avaruus sisältää erittäin epäjatkuvia funktioita; konstruoi itse sellainen joka ei ole jatkuva missään reaaliakselin pisteessä! Toisaalta jokaista L^p-avaruuden elementtiä voidaan lähestyä (ko. avaruuden omassa normissaan) jatkuvilla, kompaktikantajaisilla[8] funktioilla, jos $1 \leq p < \infty$. Tällä rajankäynnillä voidaan mm. määritellä Cauchy-ongelmalle (8) sellaisia *yleistettyjä* ratkaisuja x, joiden aikaderivaatat x' saattavat olla hyvinkin epäjatkuvia syötteen u epäjatkuvuudesta johtuen. Emme siis tee kovin suurta syntiä jatkossakaan, vaikka intuitiivisesti ajattelisimme edelleen kaikkien signaalien olevan jatkuvia. Seuraava tehtävä edellyttää jonkin verran reaali- ja funktionaalianalyysin tekniikkojen tuntemusta.

Tehtävä 22. *Olkoon $\Sigma := \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ input-stabiili systeemi ja $\mathcal{B}^t$ sen kontrolloitavuusoperaattori. Olkoon $x_0 \in \mathbb{C}^n$ ja $u \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$ mielivaltaisia. Osoita, että funktio*

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \mathcal{B}^t u$$

on hyvin määritelty kaikilla ja derivoituva (Lebesgue) melkein kaikilla $t \geq 0$, laajentamalla operaattoria $\mathcal{B}^t$ sen jatkuvuuden perusteella. Osoita, että yhtälö $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ toteutuu (Lebesgue) melkein kaikilla $t \geq 0$.

Säätöteorian kannalta tärkeimmät näistä avaruuksista ovat signaaleille L^1- ja L^2-avaruudet. Fourier-muunnos määritellään nk. Fourier-integraalin avulla kaikille $u \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ seuraavasti:

Määritelmä 23. *Funktion $u \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ Fourier-muunnos määritellään funktiona $\hat{u} : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}^m$ integraalilla*

$$\hat{u}(i\omega) =: \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} u(t) \, dt, \tag{12}$$

[8] Reaaliakselilla määritelty funktio on kompaktikantajainen täsmälleen silloin kun se häviää jonkin äärellisen pituisen intervallin ulkopuolella.

ja tätä lineaarista kuvausta $u \mapsto \hat{u}$ merkitään kirjaimella $\mathcal{F}$. Myös kuvausta $\mathcal{F}$ kutsutaan Fourier-muunnokseksi.

Merkitsemme funktion u sekä Laplace- että Fourier-muunnoksia samalla symbolilla $\hat{u}$, mutta asiayhteydestä aina selviä kummasta kulloinkin on kysymys. Fourier-muunnettavilta funktioilta u on yllä vaadittu, että ne ovat luokassa L^1, josta seuraa että muunnoksen määrittelevä integraali suppenee itseisesti. Tällöin pätee myös nk. Riemann–Lebesgue -lemma: $\hat{u}$ on itse asiassa tasaisesti jatkuva funktio joka häviää äärettömyyksissä, eli lyhyemmin $\hat{u} \in C_0(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$. L^1-vaatimus voidaan poistaa seuraavan lemman 24 laajennuskonstruktiolla, mutta silloin menetään $\hat{u}$: sekä jatkuvuus että konvergenssi nollaan äärettömyyksiä lähestyttäessä.

LEMMA 24. *Olkoon $\mathcal{F}$ kuten Määritelmässä 23.*

(i) *Jokaiselle $u \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m) \cap L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ pätee*
$$||\mathcal{F}u||_{L^2(i\mathbb{R};\mathbb{C}^m)} = ||u||_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)},$$
jossa avaruuden $L^2(i\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ normi on määritelty
$$||\hat{u}||^2_{L^2(i\mathbb{R};\mathbb{C}^m)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ||\hat{u}(i\omega)||^2_{\mathbb{C}^m} \, d\omega.$$

(ii) *Fourier-muunnosoperaattori $\mathcal{F}$ voidaan laajentaa unitaariseksi kuvaukseksi $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m) \to L^2(i\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$, jota merkitään myös symbolilla $\mathcal{F}$ ja kutsutaan niin ikään (L^2-)Fourier-muunnokseksi.*

(iii) *Käänteis-Fourier-muunnosoperaattori $\mathcal{F}^{-1}$ toteuttaa kaavan*
$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{u})(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} e^{i\omega t}\hat{u}(i\omega) \, d\omega,$$
kaikilla $\hat{u} \in L^2(i\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$, jossa raja-arvo otetaan avaruuden $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ normissa.

TODISTUS. Näiden tosiseikkojen todistukset löytyvät (ainakin skalaarimuodossa) kaikista harmonisen analyysin perusoppikirjoista, kuten Rudinin kirjoista tai Katznelsonin kirjasta *An introduction to harmonic analysis*. Väite (i) tunnetaan Plancherelin lauseen (ja joskus Parsevalin identiteetin) nimellä, ja väite (ii) on sen lähes välitön korollaari. Väite (iii) on taas tavanomainen Fourier-käänteismuunnoksen kaavan eräs muoto. Raja-arvo tarvitaan, koska epäolennainen integraali ei suppenisi yli $\mathbb{R}$:n kaikilla funktioilla $\hat{u}$. □

Muutama huomautus edellisestä lemmasta on paikallaan. Kahden Hilbert-avaruuden välinen unitaarinen kuvaus $\mathcal{F}$ on yleisen määritelmän mukaan sellainen bijektio avaruuksien välillä, jonka sekä operaattorinormi että sen inverssin $\mathcal{F}^{-1}$ operaattorinormi $= 1$. Kyseessä on siis unitaarisen neliömatriisin suoraviivainen yleistys. Huomaa, että vaikka $\mathcal{F}$ on alunperin määritelty Fourier-integraalina (12), sen laajennus avaruudesta $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}^m) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ avaruuteen $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ ei ole enää tämän integraalioperaattorin muotoa. Kun ei se sellainen integraali kerran suppene.

Kun Fourier-muunnos määritellään imaginaariakselilla $i\mathbb{R}$ elävänä funktiona, nähdään helposti sen yhteys Laplace-muunnokseen. Nimittäin, jos signaali u on sekä Fourier- että Laplace-muuntuva (esimerkiksi jos $u \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m) \cap L^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)$), niin silloin

$$(\mathcal{F}u)(i\omega) = \lim_{\eta \to 0+} (\mathcal{L}u)(i\omega + \eta)$$

kaikilla $i\omega \in i\mathbb{R}$.

Fourier-muunnoksella voidaan vihdoin karakterisoida I/O-stabiilin systeemin $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ siirtofunktio täydellisesti.

Lause 25. *Olkoon $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ äärellisulotteinen lineaarinen systeemi, jonka siirtofunktio on $G(\cdot)$. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:*

(i) *Σ on I/O-stabiili.*
(ii) *Siirtofunktio $G(\cdot)$ on analyyttinen ja rajoitettu funktio joukossa $\mathbb{C}_\nu := \{s \in \mathbb{C} \quad | \quad Res > \nu\}$ eräällä $\nu < 0$.*

Kun ekvivalentit ehdot (i) ja (ii) toteutuvat, tällöin systeemin energiavahvistus toteuttaa lausekkeen

$$\begin{aligned} ||G_+||_\infty &:= \sup_{u \in L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m) \cap C(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m),\, u \neq 0} \frac{||G_+u||_{L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^p)}}{||u||_{L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)}} \\ &= \sup_{\Re s > 0} ||G(s)||_{p \times m} = \sup_{i\omega \in i\mathbb{R}} ||G(i\omega)||_{p \times m}. \end{aligned}$$

Todistus. Todistetaan pääpiirteissään implikaatio (i) $\Rightarrow$ (ii). Todistuksesta ei olennaisesti jää puuttumaan mitaan, vaikka olettaisimme että siirtofunktio $G(\cdot)$ on kompleksiarvoinen. Koska systeemi on äärellissulotteinen, sen siirtofunktio on myös rationaalinen, ja niinmuodoin määritelty ja äärellinen kaikissa paitsi ehkä äärellisen monessa imaginaariakselin $i\mathbb{R}$ pisteessä. Tällöin, jos G ei olisi analyyttinen eräasä joukossa $\mathbb{C}_\nu$, $\nu < 0$, tulisi sillä olla napa p_0, jonka reaaliosa olisi ei-negatiivinen. Oletetaanpa niin, ja katsotaan mitä siitä seuraa.

Jos $\Re p_0 > 0$, voidaan loytää syöte $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$ jolle vaste $y = G_+u$ kasvaisi eksponentiaalisesti, tarkastelemalla Laplace-muunnospuolella ja käyttämällä Propositiota 13. Tällöin Σ ei olisi I/O-stabiili. Jos taas

$\Re p_0 = 0$, tulee tutkia tarkemmin multiplikaatio-operaattoria $M_G : \hat{u} \mapsto \hat{y}$;

$$(M_G \hat{u})(i\omega) = \hat{G}(i\omega)\hat{u}(i\omega), \quad i\omega \in i\mathbb{R}.$$

Määritellään funktiot $\hat{u}_\alpha(s) = 1/(s+\alpha)$, $\alpha \in C_+$. Tällöin $\hat{u}_\alpha$ on analyyttinen koko suljetussa oikeassa puolitasossa C_+, ja se on R_+:lla elävän funktion $u_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$ Laplace-muunnos. Antamalla $\alpha \to p_0$, seuraa

$$\frac{||M_G \hat{u}_\alpha||_{L^2(\mathbb{R}_+)}}{||\hat{u}_\alpha||_{L^2(\mathbb{R}_+)}} \to \infty,$$

koska $\hat{u}_\alpha$ “poimii” funktion $i\omega \mapsto \hat{G}(i\omega)$ “äärettömän suuren arvon” pisteessä $i\omega = p_0$ sitä paremmin mitä lähempänä α on napaa.

Käyttämällä Plancherelin lausetta (Lemman 24 väite (i)), siirrytään normit säilyttäen aikatasoon, ja todetaan systeemi ei voi olla I/O-stabiili jos sillä on napa imaginaariakselilla.

Niinpä seuraa että siirtofunktion $\hat{G}(\cdot)$ napojen tulee olla jossain puolitasossa $\mathbb{C}_\nu$ jollain $\nu < 0$. Tällainen rationaalifunktio on triviaalisti rajoitettu analyyttinen funktio oikeassa puolitasossa $\mathbb{C}_+$. $\square$

Lause 26. *I/O-stabiilin systeemin I/O-kuvaus* $G : C_{c-}(\mathbb{R};\mathbb{C}^m) \to C_{c-}(\mathbb{R};\mathbb{C}^p)$ *voidaan laajentaa joukosta* $C_{c-}(\mathbb{R};\mathbb{C}^m) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ *lineaariseksi operaattoriksi* $\overline{G} : L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m) \to L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^p)$, *joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

(i) $\overline{G}$ *on aikainvariantti; eli* $\overline{G}\tau^h = \tau^h\overline{G}$ *kaikilla* $h \in \mathbb{R}$.
(ii) $\overline{G}$ *on kausaalinen; eli jos* $u(t) = 0$ *kaikilla* $t \leq 0$, *niin silloin* $\left(\overline{G}u\right)(t) = 0$ *kaikilla* $t \leq 0$.
(iii) *Energiavahvistus toteuttaa yhtälön*

$$||\overline{G}||_\infty := \sup_{u \in L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)\, u \neq 0} \frac{||\overline{G}u||_{L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^p)}}{||u||_{L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)}} = \sup_{i\omega \in i\mathbb{R}} ||G(i\omega)||_{p \times m},$$

jossa $\hat{G}(\cdot)$ *on systeemin siirtofunktio.*

3.4. Hardy-avaruudet. Edellä tarkasteltiin signaaleja avaruudessa $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$. Näiden signaalien eräs ominaisuus oli se, että tällaiset signalit eivät yleensä häviä missään $-\infty$:n ympäristössä. Todettiin että tällaisten signaalien käyttö Cauchy-ongelman (8) yhteydessä aiheuttaa kahdenlaisia ongelmia. Ensiksi, L^2-syötteiltä puuttuva jatkuvuus tekee differentiaaliyhtälön ratkaisun teknillisesti vaikeammaksi, mutta tästä päästiin ympäri esim. approksimoimalla signaaleja jatkuvilla signaaleilla tai käyttämällä vahvempia reaalianalyysin työkaluja yleisemmän Cauchy-ongelman ratkaisemissa. Toiseksi, että L^2-signaali ei häviä kaikilla riittävän negatiivisilla ajanhetkillä, tekee mahdottomaksi asettaa systeemin differentiaaliyhtälöä alkuarvo- eli Cauchy-ongelman(8) muodossa. Tästä (ja eräistä muista, mm. kausaalisuustarkasteluihin liittyvistä syistä) tarvitsemme erityisesti sellaisia (ehkä hyvinkin epäjatkuvia) L^2-signaaleja, jotka poikkeavat nollasta vain positiisilla ajanhetkillä.

Tarkastellaan siis sellaisia $\mathbb{C}^m$-arvoisia signaaleja, jotka ovat muutoin L^2-funktioita, mutta häviävät kaikilla negatiivisilla ajan hetkillä. Nämä signaalit muodostavat Hilbert-avaruuden, jota merkitään symbolilla $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)$. Selvästi voidaan tehdä ortogonaalinen suora summa -hajotelma

$$L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m) = L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m) \oplus L^2(\mathbb{R}_-;\mathbb{C}^m), \tag{13}$$

jossa jälkimmäisen avaruuden elementit ovat tasan niitä L^2-funktioita jotka häviävät joukossa $\mathbb{R}_+$. Koska Fourier muunnos on unitaarinen ekvivalenssi avaruuksien $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ ja $L^2(i\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ välillä (ks. Lemman 24 väite (i)), haluamme tietää kuinka ortogonaalinen suora summa (13) esitetään taajuustasossa. L^2-Fourier-muunnoksen unitaarisuudesta johtuen ortogonaaliset avaruudet kuvautuvat ortognaalisille avaruuksille. Päädymme funktioteoriasta tuttujen *Hardy-avaruuksien* ja niiden elementtien *nontangentiaalisiin reuna-arvojen* tutkimiseen.

MÄÄRITELMÄ 27. (i) *Symbolilla* $H^2(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^m)$ *merkitään niiden* $\mathbb{C}^m$*-arvoisten, oikeassa puolitasossa* $\mathbb{C}_+$ *analyyttisten funktioiden* $\hat{u}$ *vektoriavaruutta, joille*

$$\sup_{r>0} \int_{-\infty}^{\infty} ||\hat{u}(r+i\omega)||^2_{\mathbb{C}^m}\, d\omega < \infty,$$

varustettuna normilla

$$||\hat{u}||_2^2 := \frac{1}{2\pi} \sup_{r>0} \int_{-\infty}^{\infty} ||\hat{u}(r+i\omega)||^2_{\mathbb{C}^m}\, d\omega.$$

(ii) *Symbolilla* $H^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{p\times m})$ *merkitään niiden* $p\times m$ *matriisiarvoisten, oikeassa puolitasossa analyyttisten funktioiden vektorivaruutta, joille luku*

$$||\hat{G}||_\infty := \sup_{\Re s>0} ||\hat{G}(s)||_{p\times m}$$

on äärellinen. Tätä lukua kutsutaan funktion $\hat{G}$ H^∞*-normiksi.*

(iii) *Vektoriavaruus* $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{p\times m})$ *on niiden* $\hat{G}\in H^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{p\times m})$ *osajoukko, jotka lisäksi ovat rationaalisia funktioita.*

(iv) *Vektoriavaruus* $RL^\infty(i\mathbb{R};\mathbb{C}^{p\times m})$ *on niiden* $\mathbb{C}^{p\times m}$*-arvoisten rationaalifunktioiden* $\hat{G}$ *joukko, joilla ei ole napoja imaginaariakselilla.*

Avaruus $H^2(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^m)$ on annetulla normillaan varustettuna Hilbert-avaruus, ja samoin on $H^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{p\times m})$ Banach-avaruus. Voidaan osoittaa, että funktio $(0,\infty)\ni r\mapsto\int_{-\infty}^{\infty}||\hat{u}(r+i\omega)||^2_{\mathbb{C}^m}\,d\omega\mapsto[0,\infty]$ on ei-kasvava, joten H^2-avaruuden normi voidaan antaa muodossa

$$||\hat{u}||_2^2=\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}||\hat{u}(r+i\omega)||^2_{\mathbb{C}^m}\,d\omega.$$

Mitä tulee avaruuteen $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{p\times m})$, Lauseen 25 väite voidaan lausua seuraavassa muodossa.

Propositio 28. *Seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) $\hat{G}(\cdot)$ *on äärellisulotteisten, I/O-stabiilien lineaaristen systeemien* $\Sigma=\left[\begin{smallmatrix}A&B\\C&D\end{smallmatrix}\right]$ *siirtofunktio, jossa* m *ja* p *ovat input- ja output-avaruuksien dimensiot,*

(ii) $\hat{G}(\cdot)\in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{p\times m})$*, ja*

(iii) $\hat{G}(\cdot)$ *on rationalinen funktio, jonka kaikki navat sijaitsevat vasemmassa puolitasossa* $\mathbb{C}_-$*.*

Molemmilla avaruuksilla $H^2(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^m)$, $H^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{p\times m})$ on se ominaisuus, että niiden alkiot $\hat{u}$, $\hat{G}$ voidaan yleistetyssä mielessä nähdä funktioina imaginaariakselilla $i\mathbb{R}$, vaikka ne alunperin ovat määriteltyjä vain avoimessa oikeassa puolitasossa $\mathbb{C}_+$.

Lemma 29. *Olkoon* $\hat{u}\in H^2(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^m)$ *ja* $\hat{G}\in H^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{p\times m})$ *mielivaltaisia.*

(i) *Melkein kaikilla* $i\omega\in i\mathbb{R}$ *on olemassa vektori* $\hat{u}(i\omega)\in\mathbb{C}^m$*, jolle pätee*

$$\lim_{j\to\infty}\hat{u}(s_j)=\hat{u}(i\omega)$$

kaikilla jonoilla $\{s_j\}_{j\geq 1}\subset\mathbb{C}_+$ *jotka konvergoivat pisteeseen* $i\omega$ *nontangentialisesti. Raja-arvojen muodostama Lebesgue-melkein kaikkialla määritelty funktio (jota merkitään myös symbolilla* $\hat{u}$*) toteuttaa* $\hat{u}\in L^2(i\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ *ja lisäksi*

$$||\hat{u}||_{L^2(i\mathbb{R};\mathbb{C}^m)}=||\hat{u}||_2. \tag{14}$$

(ii) *Melkein kaikilla* $i\omega \in i\mathbb{R}$ *on olemassa vektori* $\hat{G}(i\omega) \in \mathbb{C}^{p\times m}$, *jolle pätee*

$$\lim_{j\to\infty} \hat{u}(s_j) = \hat{G}(i\omega)$$

kaikilla jonoilla $\{s_j\}_{j\geq 1} \subset \mathbb{C}_+$ *jotka konvergoivat pisteeseen* $i\omega$ *nontangentialisesti. Raja-arvojen muodostama Lebesgue-melkein kaikkialla määritelty funktio (jota merkitään myös symbolilla* $\hat{u}$*) toteuttaa* $\hat{G} \in L^\infty(i\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ *ja lisäksi*

$$||\hat{G}||_{L^\infty(i\mathbb{R};\mathbb{C}^m)} = ||\hat{G}||_\infty. \tag{15}$$

Todistus. Tämä löytyy skalaarimuodossa vaikkapa Rudinin kirjasta *Real and Complex analysis*. Esitetyn vektoriarvoisen variantin todistus etenee samalla tavalla. Ääretöndimensioisissa avaruuksissa todistus on jonkin verran teknillisempi, ja se löytyy esim. Rosenblumin ja Rovnyakin kirjasta *Hardy classes and operator theory*. □

Nontangentiaalinen korvergenssi jonolle $\{s_j\}_{j\geq 1}$ tarkoittaa sitö, että kaikki jonon alkiot ovat jossain sektorissa, jonka keskuskulma on alle π, ja keskipiste imaginaariakselilla olevassa jonon rajapisteessä.

Määritelmä 30. *Elementtien* $\hat{u} \in H^2(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^m)$ *ja* $\hat{G} \in H^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{p\times m})$ *pistettäisiä raja-arvoja imaginaariakselilla kutsutaan ko. funktioiden nontangentiaalisiksi reuna-arvofunktioiksi. Niitä merkitään samalla symbolilla kuin alkuperäisiä funktioita. Nontangentiaalisten reuna-arvofunktioiden luokkia merkitään*

$$H^2(i\mathbb{R};\mathbb{C}^m) \subset L^2(i\mathbb{R};\mathbb{C}^m) \text{ ja } H^\infty(i\mathbb{R};\mathbb{C}^{p\times m}) \subset L^\infty(i\mathbb{R};\mathbb{C}^{p\times m}).$$

Isometrisista normiestimaateista (14) ja (15) seuraa suoraan, että $H^2(i\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ ja $H^\infty(i\mathbb{R};\mathbb{C}^{p\times m})$ ovat (Banach) avaruuksien $L^2(i\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ ja $L^\infty(i\mathbb{R};\mathbb{C}^{p\times m})$ suljettuja aliavaruuksia. On helppo osoittaa että molemmat ovat aitoja aliavaruuksia, valitsemalla sopivia rationaalifunktioita. Hilbert-avaruus $H^2(i\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ voidaan karakterisoida L^2-Fourier-muunnoksen kautta nk. Paley–Wiener lauseen avulla.

Lemma 31. *Olkoon* $\hat{u} \in L^2(i\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ *mielivaltainen. Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) $\hat{u} \in H^2(i\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$, *ja*
(ii) $\hat{u} = \mathcal{F}u$ *eräälle* $u \in L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)$, *jossa* $\mathcal{F}$ *merkitsee* L^2-*Fourier-muunnosta.*

Kun ekvivalentit ehdot (i) ja (ii) toteutuvat, määrittelee ($L^2(\mathbb{R}_+)$*-avaruuteen yleistetty) Laplace-muunnos*

$$\hat{u}_l(s) := \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} e^{-st}u(t)\,dt \tag{16}$$

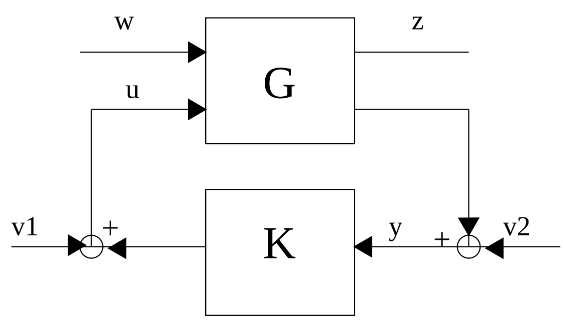
analyyttisen funktion $\mathbb{C}_+ \ni s \mapsto \hat{u}_l(s) \in \mathbb{C}^m$ *joka toteuttaa* $\hat{u}_l \in H^2(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^m)$*, ja jonka nontangentialiset reuna-arvot toteuttaa* $\hat{u}_l(i\omega) = \hat{u}(i\omega)$ *Lebesgue-melkein kaikilla* $i\omega \in i\mathbb{R}$*.*

TODISTUS. Ekvivalenssiosan todistus löytyy esim. Dymin ja McKeanin kirjasta *Fourier series and integrals*. Analyyttisen jatkon antava säännöllistetty Laplace-muunnos (16) seuraa ihan peruskonvergenssianalyysillä. $\square$

4. Reduktio standardiongelmaan

Tässä luvussa määritellään nk. *mallinsovitusongelma*, joka voidaan nähdä erikoistapauksina luvussa 1 määritellystä standardiongelmasta. Standardiongelma voidaan käänäen palauttaa mallinseurantaongelmaksi, joka on itseasiassa hieman yksinkertaisempi tehtävä. Aloitamme kuitenkin tarkastelemalla takaisinkytkentäkaavioiden tulkintoja. Toteamme että kaaviot voidaan yhtä hyvin tulkita niin aikatasossa kuin taajuustasossakin.

4.1. Takaisinkytkentäkaavioiden semantiikasta. Jo aivan näiden luentojen alkupuolella, ensimmäisessä luvussa, olemme kuvanneet pääpiirteissään nk. standardi- eli nelilohko-ongelman, jota kuvataan takaisinkytkentäkaaviolla jossa operaattori G on lohkottu muo-



KUVA 2. Nelilohko-ongelma

toon $\left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ siten, että takaisinkytkentä- kaavion summausliitokset ovat järkeviä. Purkamalla kaavio algebrallisiksi yhtälöiksi, saadaan (kuten aikaisemmin on jo esitettykin)

$$\begin{bmatrix} I & -G_{12} & 0 \\ 0 & I & -K \\ 0 & -G_{22} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ G_{21} & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Näihin algebrallisiin yhtälöihin päätyminen ei juurikaan edellytä takaisinkytkentäkaavion kuvaaman asetelman syvällistä “semanttistaa analyysiä“, vaan lähinnä selvää järkeä. Itseasiassa, nämä kaaviot voidaan tulkita useilla eri tavoilla, jotka johtavat lopulta olennaisesti samoihin “operaattori- teorian” tehtäviin. Aina on riittää seurata johdonmukaisesti seuraavaa “alkuarvotehtävätulkintaa”.

Oletamme että jokainen kaavioissa esiintyvä laatikko on esitettävissä jonkin (ehkä tuntemattoman) äärellisulotteisen lineaarisen systeemin

$\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ I/O-kuvauksen Toeplitz-operaattorina, jota on edellä merkitty symbolilla G_+. Tällöin jokainen takaisinkytkentäkaavion elementti on lineaarinen tila-avaruussysteemi, joka aloittaa toimintansa alkuhetkellä $t = 0$, alkutilasta $x(0) = 0$. Signalien energiasisältöja mittaamme L^2 -tyyppisillä normeilla.

Oletamme edelleen, että kaikki ulkoiset syötteet ovat määriteltyjä kaikilla positiivisilla ajanhetkillä $t \geq 0$, sekä Laplace-muuntuvia ja erityisesti jatkuvia (tämä oletus vain laiskuudestamme johtuen). Olemme todistaneet Propositiossa 13, että äärellisdimensioiset systeemit eivät kuvaa Laplace-muuntuvia signaaleja ei-Laplace-muuntuviksi. Niinpä huomaamme, että kaikki kaavion sisäiset signaalit ja tila-trajektorit ovat niin ikään Laplace- muuntuvia — olettaen että takaisinkytkennöissä ei tapahdu mitään patologista. Nämä patologiat ovat analogisia Proposition 13 käänteisen suunnan lisävaatimukselle (että läpisyöttömatriisi D on kääntyvä), ja sellaiset patologiat suljetaan erikseen pois tietyillä lisävaaatimuksilla. Ei-patologiset takaisinkytkentäloopit ovat nk. *hyvinasetettuja (well-posed).*

Tämä tulkinta antaa jokaiselle lohkokaaviolle fysikaalisesti ymmärrettävän ja matemattisesti solidin tulkinnan. Kaikki esiintyvät signaalit voidaan korvata Laplace-muunnoksillaan, ja kaikki esiintyvät laatikot (eli Toeplitz-operattorit muotoa G_+) vastaavilla rationaalisilla siirtofunktioilla[9]. Tästä on meille käytännön laskujen kannalta huomattavasti apua, koska rationaalisten siirtofunktioiden käsitteleminen on periaatteessa hyvin yksinkertaista. Lisäksi siirtofunktioiden nollakohtien ja napojen avulla voidaan muotoilla stabiilisuusehtoja.

4.2. Stabilointi- ja standardiongelma taajuustasossa. Yhtälö (17) Laplace-muuntamalla saadaan ekvivalentisti (mikäli kaikki signaalit ovat Laplace-muuntuvia, ja lohkot ovat joittenkin systeemien Toeplitz-operaattoreita)

$$\begin{bmatrix} I & -\hat{G}_{12}(s) & 0 \\ 0 & I & -\hat{K}(s) \\ 0 & -\hat{G}_{22}(s) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}(s) \\ \hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(s) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \hat{G}_{21}(s) & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}(s) \\ \hat{v}_1(s) \\ \hat{v}_2(s) \end{bmatrix} \tag{18}$$

kaikilla paitsi äärellisen monella $s \in \mathbb{C}_+$. Erityisesti, mikäli siirtofunktio $\hat{G}_{22}$ on täysin aito ("strictly proper", eli $\hat{G}_{22}(\infty) = 0$), on yhtälön (18) vasemmalla puolella määritellyllä lohkomatriisilla käänteismatriisi kun $|s|$ on riittävän iso. Vaatimus $\hat{G}_{22}(\infty) = 0$ takaa siis, että takaisinkytkentälooppi on hyvinasetettu, ja siirtofunktio $[\hat{w}(s) \quad \hat{v}_1(s) \quad \hat{v}_2(s)]^T \mapsto$

[9]Insinöörit eivät usein teekään kovin tarkka eroa aika- ja taajuustasokäsitteiden välillä.

$\hat{z}(s)$ $\hat{u}(s)$ $\hat{y}(s)$ on selvästi muotoa

$$\hat{H}_{G,K}(s) := \begin{bmatrix} I & -\hat{G}_{12}(s) & 0 \\ 0 & I & -\hat{K}(s) \\ 0 & -\hat{G}_{22}(s) & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(s) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \hat{G}_{21}(s) & 0 & I \end{bmatrix}, \tag{19}$$

Osoittautuu, että nimenomaan siirtofunktion nurkka $\hat{G}_{22}$ vaatii nelilohko-ongelman tapauksessa erityistä huomiota.

Määritelmän 6 stabilointitehtävä voidaan nyt lausua taajuustasossa, rationaalisten siirtofunktioiden avulla seuravasti:

PROPOSITIO 32. *Olkoon $\hat{G}$ rationaalinen funktio, joka on hajoteltu* 2×2 *lohkomatriisiksi* $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{smallmatrix}\right]$. *Oletetaan lisäksi, että $\hat{G}_{22}$ on täysin aito. Tällöin määritelmän 6 stabilointitehtävän ratkaisu on ekvivalentti stabiloivien säätäjien joukon* [10]

$$S_G := \{\hat{K} \in RL^\infty \text{ on aito} \quad | \quad \hat{H}_{G,K} \in RH^\infty\}$$

parametrisoinnin kanssa.

Tarvitsemme siis lausekkeen siirtofunktiolle $\hat{H}_{G,K}$. Mikäli itse asiassa $\hat{G}_{22}$ on identtisesti nolla, on yhtälön (19) vasemmanpuoleisen tekijän inverssi helppo laskea (ks. tehtävä 5).

$$\hat{H}_{G,K}(s) = \begin{bmatrix} I & \hat{G}_{12}(s) & G_{12}(s)K(s) \\ 0 & I & \hat{K}(s) \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(s) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \hat{G}_{21}(s) & 0 & I \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(s) + \hat{G}_{12}(s)K(s)G_{21}(s) & \hat{G}_{12}(s) & G_{12}(s)K(s) \\ K(s)G_{21}(s) & I & \hat{K}(s) \\ \hat{G}_{21}(s) & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Saamme suoraan varsin triviaalin ratkaisun stabilointitehtävälle tässä erikoistapauksessa.

PROPOSITIO 33. *Määritelköön $G = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ ja K standardiongelman takaisinkytkentäkaavion. Oletetaan että kaikki systeemit ovat äärellisdimensioisia, ja että $G_{22} = 0$. Tällöin K stabiloi G:n jos ja vain jos kaikki (Toeplitz-) operaattorit G_{11}, G_{12}, G_{21} ja K ovat I/O-stabiileja jos ja vain jos siirtofunktioiden $\hat{G}$ ja $\hat{K}$ kaikki navat ovat joukossa $\mathbb{C}_+$.*

Stabilointitehtävä voidaan siis ratkaista ainoastaan, jos systeemi G on alunperin stabiili, mikäli $G_{22} = 0$. Tässä tapauksessa stabiloivia säätäjiä ovat kaikki stabiilit K, jotka signaalien dimensioiden puolesta ovat ylipäätään kytkettävissä haluttuun takaisinkytkentämuotoon.

[10] Tässä luonnollisesti vaaditaan funktiolta $\hat{K}$, että yhtälön (19) siirtofunktio $\hat{H}_{G,K}$ on signaalien dimensioiden puolesta ylipäätään hyvin määritelty.

Huomaamme siis, että yleisemmässä ja epätriviaalissa tapauksessa valittavan säätäjän K täytyy tehdä jotain olennaista nimenomaan lohkolle G_{22}.

Propositionssa 32 annetun yleisemmän tehtävän ratkaisu perustuu olennaisesti seuraavalle:

TEHTÄVÄ 34. *Olettaen että siirtofunktio $\hat{G}_{22}$ on täysin aito, laske lauseke rationaalifunktiolle $\hat{H}_{G,K}(s)$. Käytä hyväksi matriisin inverssin häiriö- argumenttia ja kaavaa tapaukselle $G_{22} = 0$. Voitko heikentää vaatimusta, että $\hat{G}_{22}$ tulee olla täysin aito?*

Standarditehtävä voidaan niin ikään saattaa taajuustasomuotoon.

PROPOSITIO 35. *Olkoon $\hat{G}$ rationaalinen funktio, joka on hajoteltu 2×2 lohkomatriisiksi $\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{bmatrix}$. Oletetaan että $\hat{G}_{22}$ on täysin aito. Merkitään Proposition 32 stabiloivien säätäjien joukkoa*

$$S_G := \{\hat{K} \quad \text{rationaalinen} \quad | \quad \hat{H}_{G,K} \in RH^\infty\}.$$

(i) *Standardiongelman ratkaisu (rationaalimuodossaan) on ekvivalenttia niiden (rationaali)funktioiden $K \in S_G$ löytämiseen, joille siirtofunktio*

$$\hat{G}_{\hat{K}} := \hat{G}_{11} + \hat{G}_{12}\left(I - \hat{G}_{22}\hat{K}\right)^{-1}\hat{G}_{21} \in RH^\infty,$$

toteuttaa

$$||\hat{G}_{\hat{K}}|| = \inf_{\hat{K}' \in S_K} ||\hat{G}_{\hat{K}'}||.$$

(ii) *Suboptimaalisen standardiongelman ratkaisu (rationaalimuodossaan) on ekvivalenttia niiden (rationaali)funktioiden $K \in S_G$ joukon parametrisointiin, joille siirtofunktio $G_{\hat{K}}$ toteuttaa*

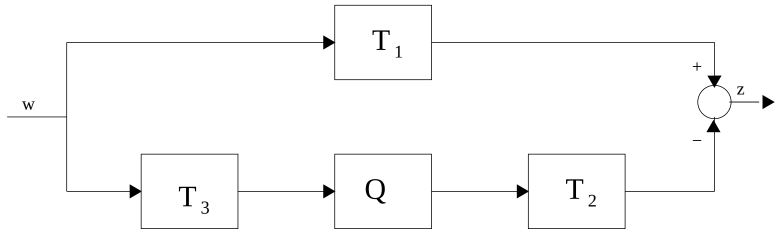
$$||\hat{G}_{\hat{K}}|| < \gamma,$$

annetulla $\gamma > 0$.

Tähän ongelmaan palataan myöhemmin.

4.3. Mallinsovitusongelma. Seuraavassa kaaviossa määritellään nk. *mallinsovitusongelma*. Koska aikatason ja taajuustason esityksen ovat edellä todettu ekvivalentteiksi, formuloimme tehtävän suoraan siirtofunktioiden avulla.

Siirtofunktio $\hat{T}_1 \in RH^\infty$ on ennalta annettu "mallisiirtofunktio", jota on tarkoitus lähestyä tulolla $\hat{T}_2\hat{Q}\hat{T}_3$. Sekä $\hat{T}_2 \in RH^\infty$ että $\hat{T}_3 \in RH^\infty$



Kuva 3. Mallinsovitusongelma

on annettuja “suunnittelurajoituksia”, ja “säätäjä” $\hat{Q}$ tulee valita siten, että

$$M_{\hat{Q}} := \sup \{ \, ||\hat{z}||_2 \quad | \quad w \in H^2, ||\hat{w}||_2 \leq 1\}$$

minimoituu yllä olevan kaavion mukaisessa kytkennässä. Lisäksi vaaditaan, että hyväksyttävä säätäjä on stabiili, eli $\hat{K} \in RH^\infty$.

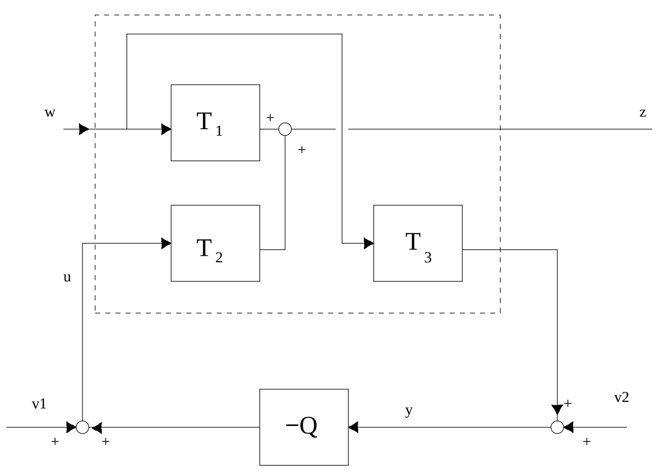
Selvästi kuvauksen $\hat{w} \mapsto \hat{z}$ siirtofunktio on muotoa $\hat{T}_{\hat{Q}} := \hat{T}_1 - \hat{T}_2\hat{Q}\hat{T}_3$, ja $M_{\hat{Q}} = ||\hat{T}_{\hat{Q}}||_\infty$. Tehtävä voidaan luonnollisesti antaa suboptimaalisessa muodossa, jolloin annetulle vakiolle $\gamma > 0$ halutaan parametrisoida joukko

$$\{\hat{Q} \in RH^\infty \quad | \quad M_{\hat{Q}} < \gamma\}.$$

Kirjoittamalla

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{T}_1 & \hat{T}_2 \\ \hat{T}_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{K} = -\hat{Q},$$

huomataan viimeistään kaaviosta että mallinsovitusongelma on erikois-



Kuva 4. Mallinsovitusongelma standardiongelmana

tapaus standardiongelmasta, kunhan ulkoisia häiriösignaaleja v_1 ja v_2 lisäillään. Koska erityisesti $\hat{G}_{22} = 0$, voimme käyttää Propositiota 33 edeltävää kaavaa vastaavalle siirtofunktiolle $\hat{H}_{G,K}$. Kääntäen, jos

$\hat{G}_{22} = 0$, voidaan nelilohkotehtävä saattaa välittömästi yllä olevalla tulkinnalla mallinsovitusongelmaksi. Koska $\hat{G}$ ja $\hat{K}$ on a priori vaadittu stabiileiksi, seuraa että stabilointivaatimus $\hat{H}_{G,K}$:lle on lähes triviaalisti täytetty Proposition 33 nojalla.

5. Jaollisuusteoriaa

Stabilointitehtävän ratkaisu perustuu tietyn “kaksinkertaisesti jaottoman” faktorisoinnin laskemiseen systeemin siirtofunktioille. Tämä johtaa meidät skalaaritapauksessa algebrallisiin jaottomuustarkasteluihin renkaassa $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$. Käyttämällä algebrallisia tekniikoita (kuten Vidyasagarin kirjassa) nämä tekniikat saadaan yleistettyä matriisitapaukseen.

5.1. Jaollisuusteoriaa pääideaalialueissa. Oletamme seuraavassa, että lukija on perillä algebrallisten renkaiden teorian perusteista, ja seuraava teksti on lähinnä vain tarkoitettu oikeaan “tunnelmaan” pääsemiseksi.

Merkitään (kompleksikertoimisia) polynomien rengasta symbolilla $\mathbb{C}[x]$, ja sen (muodollisten) osamäärien rengasta eli *jakokuntaa* (field of fractions) symbolilla $\mathbb{C}(x)$. Selvästi $\mathbb{C}(x)$ on täsmälleen kompleksiarvoisten rationaalifunktioiden joukko $\mathbb{C}$:ssä. Tarvitsemme myös kolmatta rengasta, joka on vanha tuttu avaruus

$$\begin{aligned}&RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})\\&=\{f=p/q\in\mathbb{C}(x)\quad|\quad \text{kaikki navat joukossa } \mathbb{C}_- \text{ ja } \deg p\le\deg q\}.\end{aligned}$$

Renkaan $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ jakokunta on niin ikään kaikkien rationaalifunktioiden joukko $\mathbb{C}(x)$. Tämä on selvää koska

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)}{(x+1)^k}\cdot\left(\frac{q(x)}{(x+1)^k}\right)^{-1}$$

jossa $k:=\max(\deg p,\deg q)$.

Suoraan määritelmän perusteella osoitetaan, että nämä kaikki edelliset joukot ovat ykkösellä varustettuja kommutatiivisia renkaita — ja paljon enemmänkin. On tarpeen tuntea myös renkaiden $\mathbb{C}[x]$ ja $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ kääntyvien alkioiden eli ko. renkaitten *yksikköjen* (unit) joukko. Polynomi $p\in\mathbb{C}[x]$ on kääntyvä jos ja vain jos se on vakiopolynomi. Funktio $r\in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ on kääntyvä jos ja vain jos $r(s)\neq 0$ kaikilla $s\in\mathbb{C}_+$ ja lisäksi $\lim_{|s|\to\infty}|r(s)|>0$. Tällaisia funktioita kutsutaan funktioteoriassa *rationaalisiksi (skalaarisiksi)* H^∞*-ulkofunktioiksi.*

Renkaat $\mathbb{C}[x]$ ja $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ on itse asiassa kommutatiivisia *kokonaisalueita* (englanniksi domain tai integral domain). Tämä tarkoittaa, että kahden alkion tulo on nolla ainoastaan jos jompi kumpi tekijöistä on nolla — aitoja nollantekijöitä siis ei ole.

Jatkossa tarvitsemme jaottomuustuloksia ainoastaan renkaassa $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ sekä sen matriisiarvoisessa varianteissa $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{p\times m})$

[11]. Siitä huolimatta seuraava jaollisuusteoria lienee selkeintä esittää alkaen ykkösellisestä, kommutatiivisesta renkaasta R, ja lisäämällä sitten pikkuhiljaa aksioomeja.

Olkoon $f, g, r \in R$ mielivaltaisia. Mikäli $f = rg$, niin sanotaan että r *jakaa* f:n, eli symbolein $r|f$. Jo alaluokilla opetettiin *suurimmasta yhteisestä tekijästä (s.y.t)* ja *pienimmästä yhteisestä jaettavasta (p.y.j)* kommutatiivisessa kokonaisalueessa $\mathbb{Z}$, vaikka sitä ei silloin toivottavasti kutsuttu tällä nimellä.

Nämä käsitteet voidaan määritellä yleisemmin missä tahansa renkaassa, mutta tästä on maksettava hinta menetettynä yksikäsitteisyytenä:

MÄÄRITELMÄ 36. *Olkoon $f, g, r \in R$, jossa R on mielivaltainen ykkösellinen kommutatiivinen rengas.*

(i) *Alkio r on alkioitten f, g suurin yhteinen tekijä, mikäli $r|f$, $r|g$, sekä $r'|f, r'|g \Rightarrow r|r'$. Tällöin kirjoitetaan $r \in s.y.t.(f, g)$.*
(ii) *Alkio r on alkioitten f, g pienin yhteinen jaettava, mikäli $f|r$, $g|r$, sekä $f|r', g|r' \Rightarrow r|r'$. Tällöin kirjoitetaan $r \in p.y.j.(f, g)$.*
(iii) *Alkiot f, g ovat jaottomia, jos jokainen $r \in s.y.t.(f, g)$ on yksikkö.*

Sekä s.y.t. että p.y.j. ovat määriteltyjä (silloin kun ovat ylipäätään olemassa) ainoastaan modulo renkaan yksiköt, ja siksi niitä merkittiin edellisessä määritelmässä joukkoina. Renkaassa $\mathbb{Z}$ alkio 1 on ainoa yksikkö, jolloin s.y.t. ja p.y.j. ovat yksikäsitteisesti määrättyjä. Mikäli rengas on kunta, niin kaikki nollasta poikkeavat alkiot ovat yksikköjä, ja kaikki jaottomuustarkastelut trivialisoituvat. Kommutatiivisissa kokonaisalueissa (kuten $\mathbb{C}[x]$ ja $RH^\infty(\mathbb{C}_+; C)$) voidaan parametrisoida kaikki $r \in s.y.t.(f, g)$ yksiköitten avulla, koska

$$s.y.t.(f, g) = \{r_0 e \quad | \quad e \in R \text{ on yksikkö}\}$$

mielivaltaiselle kiinteälle $r_0 \in s.y.t.(f, g)$.

Olemme jauhaneet jo pitkään s.y.t.stä ja jaottomuudesta, mutta emme ole sanallakaan ottaneet kantaa siihen, onko ylipäätään kahdella alkiolla $f, g \in R$ olemassa jokin $r \in s.y.t.(f, g)$. Olemassaolokysymyksen ratkaisuun tarvitaan hieman vahvempi oletus. Mikäli kommutatiivisen, ykkösellisen kokonaisalueen R jokainen ideaali I[12] on yhden (ideaalista I riippuvan) alkion $a \in R$ virittämä,

$$I = \{ar \quad | \quad r \in R\} = aR,$$

[11] Jälkimmäiset eivät ole yleensä edes renkaita, koska väärändimensioisia matriiseja on paha mennä kertomaan keskenään

[12] Hae määritelmä tälle vaikkapa Jacobsonin Basic Algebra I:sta.

sanotaan että R on *pääideaalialue (principal ideal domain)*. Yksinkertaisin esimerkki pääideaalialueesta on Z, jonka ideaalit ovat kaikki muotoa $I_n = n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

PROPOSITIO 37. *Olkoon R kommutatiivinen, ykkösellinen pääideaalialue. Tällöin jokaisella $f, g \in R$ on olemassa $r \in s.y.t.(f, g)$. On myös olemassa $t \in p.y.j.(f, g)$, joka toteuttaa yhtälön $r_0 t = fg$ kun $r_0 \in s.y.t.(f, g)$ on mielivaltainen.*

S.y.t. ja p.y.j. ovat olemassa myös mille tahansa äärelliselle kokoelmalle funktioita, mutta tämä ei olennaisesti eroa kahden elementin tapauksesta. Olemme erityisen onnellisia siitä, että rengas $RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C})$ osoittautuu seuraavassa luvussa pääideaalialueeksi, ja vahvemmin jopa nk. aidoksi Euklidiseksi alueeksi.

Kommutatiivisen pääideaalialueessa R kutsutaan alkiota $f \neq 1$ *jaottomaksi* (prime), mikäli

$$r|f \Rightarrow r = 1 \text{ tai } r = pe \text{ jollakin yksiköllä } e \in R$$

Pääideaalialueen erityinen viehätys on siinä, että jokainen alkio f voidaan olennaisesti yksikäsitteisesti jakaa jaottomien alkioiden eli *alkutekijöidensä* kommutoivaksi tuloksi.

LEMMA 38. *Olkoon R kommutatiivinen pääideaalialue, ja $f \in R$. Tällöin on olemassa joukko $\{ p_j\}_{j=1,\cdots,n} \subset R$ jaottomia alkioita, siten että*

$$f = \prod_1^n p_j.$$

Tällainen esitys on tulon järjestystä ja tulontekijöiden kertomista yksiköillä $\{ e_j\}_{j=1,\cdots,n}$, $\prod_1^n e_j = 1$ vaille yksikäsitteinen.

Tämäkin lemma on algebran perusteita. Tulokset löytyvät esimerkiksi Vidyasagarin kirjasta sivulta 382.

Meiltä puuttuu edelleen konkreettisia testejä, jolla tarkastetaan kahden alkion $f, g \in R$ jaottomuus. Pääideaalialueessa on olemassa koko joukko karakterisointeja.

LEMMA 39. *Olkoon R kommutatiivinen, ykkösellinen pääideaalialue. Olkoon $f, g \in R$ mielivaltaisia. Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) *Alkiot f, g ovat keskenään jaottomia,*
(ii) $1 \in s.y.t.(f, g)$,
(iii) *alkioilla f, g ei ole yhteistä alkutekijää, ja*

(iv) *on olemassa alkiot $x, y \in R$, siten että nk. Bezoutin identiteetti*

$$fx + gy = \begin{bmatrix} f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = 1$$

toteutuu.

Todistuksen voi hakea mistä tahansa algebran oppikirjassa, mutta se onnistuu myös kokoamalla Vidyasagarin kirjan tuloksista.

5.2. $RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C})$ **Euklidisena alueena.** Jaollisuusteoria lienee kaikkein mukavimmin esitettävissä nk. Euklidisissa alueissa (Euclidian domain). Ne ovat kommutatiivisia kokonaisalueita (ja ilmenevät olevan jopa pääideaalialueita), joissa kaikille alkioille $r \in R$ voidaan määritellä *aste* $\delta(r)$ kuvauksena $\delta : R \backslash \{0\} \to \mathbb{Z}_+$. Tämän astefunktion olennainen ominaisuus on se, että se toimii kivasti alaluokilta tutuissa polynomien jakokulma-tyyppisissä laskuissa. Tarkemmin, mielivaltaisilla $f, g \in R$ on olemassa $r \in R$ siten että joko $f = rg$ tai

$$\delta(f - rg) < \delta(g). \tag{20}$$

Tämä tarkoittaa karkeasti sitä, että voidaan laskea “eteenpäin jakokulmassa” niin että jakojäännöksen $f - rg$ aste on pienempi kuin jakajan g, mikäli jako ei mene tasan. Vaaditaan myös, että astefunktio on einouseva funktio jaollisuusmielessä

$$r | f \Rightarrow \delta(r) \leq \delta(f).$$

Tällöin $\delta(1) \leq \delta(r)$ kaikilla $r \in D$, ja mitään olennaisesti muuttamatta voidaan vaatia, että $\delta(1) = 0$. Seuraa välittömästi että $\delta(r) = \delta(re)$ jos $e \in R$ on mielivaltainen yksikkö. Edelleen $\delta(e) = 0$ kun e on yksikkö, ja tästä johtuen kunnat suljetaan triviaaleina pois Euklidisista alueista.

Osoittautuu että jokainen Euklidinen alue on pääideaalialue. Todistus on lähes triviaali, ja perustuu siihen että jokaisesta ideaalista I voidaan löytää alkio a, joka minimoi asteen $\delta(a) \leq \delta(x)$ kaikilla $x \in I$. Tällöin mielivaltaista $r \in I$ kohden on olemassa $q \in R$ siten että joko $\delta(r - qa) < \delta(a)$ tai $a | r$. Mutta edellinen ei tule kysymykseen minimaalisuuden perusteella, joten $a | r$ ja $I = aR$.

Sekä $\mathbb{C}[x]$ että $RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C})$ ovat nk. *aitoja (proper)* Euklidisia alueita, kun astefunktioksi otetaan polynomin tavanomainen aste $\deg p$ ensimmäisessä tapauksessa, ja jälkimmäisessä

$$\begin{aligned} \delta(r) &= \#\{z \in \overline{\mathbb{C}_+} \quad | \quad r(z) = 0\} + \deg q - \deg p \\ &= \#\{z \in \overline{\mathbb{C}}_+ \cup \infty \quad | \quad r(z) = 0\} \end{aligned} \tag{21}$$

jossa $r = p/q$ on annettu kahden polynomien osamääränä. Kukin nollakohta on laskettu niin monta kertaa kuin sen kertaluku osoittaa, ja luku $\deg q - \deg p$ on tulkittu rationaalifunktion r nollankohdan ∞ kertaluvuksi luonnollisella tavalla. Voidaan siis sanoa että $\delta(r)$ on nollakohtien lukumäärä (kertalukuineen laskettuna) laajennetussa suljetussa oikeassa puolitasossa $\overline{\mathbb{C}}_+ \cup \{\infty\}$. Euklidisen alueen aitous tarkoittaa määritelmän mukaan

$$\delta(fg) = \delta(f) + \delta(g).$$

Nyt on aika siirtyä meitä eniten kiinnostavan renkaan, nimittäin stabiilien skalaarisiirtofunktioiden joukon $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$:n pariin. Useimmissa algebran oppikirjoissa ei tätä rengasta käsitellä lainkaan, ja se lienee mielenkiintoinen lähinnä algebrallisesta säätöteoriasta kiinnostuneille.[13] Sensijaan Vidyasagarin Control System Synthesis -kirja on lähestulkoon omistettu tälle renkaalle, ja aivan kirjan alussa, sivulla 10, on todistettu seuraava lemma.

Lemma 40. *Rengas $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ on aito Euklidinen alue, varustettuna yhtälön (21) astefunktiolla $\delta : RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_+$.*

Polynomirengas $\mathbb{C}[x]$ on esimerkki aidosta euklidisesta alueesta, jossa astefunktio toteuttaa lisäksi $\delta(f+g) \leq \max(\delta(f), \delta(g))$. Tästä lisäoletuksesta seuraa, että kullekin f, g on olemassa *yksikäsitteinen* $r \in R$ siten että joko $f = rg$ tai aste-ehto (20) toteutuu. Rengas $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ ei toteuta tätä lisäehtoa, eikä myöskään mainittua yksikäsitteisyysehtoa.

Erityisesti Euklidisten alueiden $\mathbb{C}[x]$ ja $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ tapauksessa voidaan antaa vieläkin konkreettisempia ehtoja jaottomuudelle, jotka ovat sukua Lemman 39 väitteen (iii) ehdolle. Ensin on tarpeen identifioida molempien renkaitten jaottomat elementit.

Algebran perusteista muistetaan, että kompleksikertoimiset polynomit voidaan kirjoittaa keskenään kommutoivien monomien $x - \alpha_j$ tulona [14], jossa luvut α_j ovat polynomin nollakohdat. Edelleen, monomit $x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (vakiopolynomien ohella) ovat täsmälleen polynomirenkaan $\mathbb{C}[x]$ jaottomat elementit.

Renkaan $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ tapauksessa voidaan antaa samanlainen ehto.

Lemma 41. *Euklidisen alueen jaottomat $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ alkiot ovat täsmälleen rationaalifunktiot muotoa*

$$r_\alpha(s) = \frac{1}{s-\alpha}, \quad t_{\beta,\gamma}(s) = \frac{s-\beta}{s-\gamma},$$

jossa $\Re\alpha, \Re\gamma < \infty$, $\beta \neq \gamma$.

[13] Innokas Rudin-fani löytää eräästä hänen kirjastaan lauseen, jossa analyyttisten funktioiden avaruus on osoitettu pääideaalialueeksi. Mutta enpä sano mistä.

[14] Algebran peruslauseen avulla, joka sanoo että $\mathbb{C}$ on nk. algebrallisesti suljettu kunta.

Eiköhän tämän perustelu mene ihan määritelmän perusteella.

Huomaa, että r_α on yksikkö ja $\delta(r_\alpha) = 1$. Sensijaan $t_{\beta,\gamma}$ on yksikkö ainoastaan jos ja vain jos $\Re\beta < 0$. Mikäli $\Re\beta \geq 0$, niin silloin $\delta(t_{\beta,\gamma}) = 1$.

KOROLLAARI 42. *Alkiot $f, g \in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ ovat jaottomia jos ja vain jos niillä ei ole yhteisiä nollakohtia laajennetussa suljetussa oikeassa puolitasossa $\overline{\mathbb{C}}_+ \cup \{\infty\}$.*

Pääideaalialueessa $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ jokainen alkio voidaan siis esittää Lemman 38 nojalla olennaisesti yksikäsitteisesti alkutekijöittensä tulona. Tästä seuraa (kuten jokaisessa pääideaalialueessa), että s.y.t. ja p.y.j. voidaan eksplisiittisesti kuvata alkutekijöiden avulla, jotka $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ tapauksessa johtavat meidät katsomaan nollakohtia laajennetussa, suljetussa oikeassa puolitasossa $\overline{\mathbb{C}}_+ \cup \{\infty\}$.

KOROLLAARI 43. *Alkioiden $f, g \in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ suurin yhteinen tekijä on se tulo*

$$r(s) = \frac{1}{(s+1)^{n_2}} \prod_{j=1}^{n_1} t_{\beta_j,\gamma_j}(s)$$

Lemmassa 41 annetuista jaottomista elementeistä, jonka funktion r nollakohdat joukossa $\overline{\mathbb{C}}_+ \cup \{\infty\}$ ovat täsmälleen, kertalukua myöten, leikkaus funktioiden f, g nollakohdista samassa joukossa.

KOROLLAARI 44. *Mielivaltaisella $\hat{G} \in \mathbb{C}(x)$ on olemassa esitys eli jaoton faktorisointi $\hat{G} = f/g$ jossa $f, g \in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ ovat jaottomia. Erityisesti, tämä esitys voidaan tehdä osajoukolle $RL^\infty(i\mathbb{R};\mathbb{C})$, sekä myös kaikille (aidoille) äärellisdimensioisten skalaari-(SISO)-systeemien siirtofunktioille.*

5.3. Jaottomat faktorisoinnit matriisiarvoisessa tapauksessa. Edellä esitetty skalaarifunktioiden $f \in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ jaottomuusteoria on tietyiltä osin yleistettävissä matriisi-arvoisten funktioiden $\hat{G} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{p\times m})$ luokkaan. Lemmassa 50 osoitamme, että matriisiarvoisilla siirtofunktioilla $\hat{G} \in L^\infty(i\mathbb{R};\mathbb{C}^{p\times m})$ on olemassa nk. kaksinkertaisesti jaoton faktorisointi kahden matriisiarvoisen RH^∞-funktion osamääränä. Tämä on esitettyjen jaottomuustarkastelujen päätulos, jolle stabiloivien säätäjien parametrisointi tulee seuraavassa luvussa perustumaan. Kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin olemassaolo perustuu suurimman yhteisen oikean tekijän olemassaoloon RH^∞-matriisifunktioille. Algebrallisia komplikaatioita välttääksemme jätämme aputulosten todistukset viittausten varaan.

Aloitetaan kuitenkin määritelmistä. Että siirtofunktio $\hat{R}$ jakaa siirtofunktion $\hat{F}$ oikealta (vastaavasti vasemmalta) RH^∞:ssä, tarkoittaa että $\hat{F} = \hat{G}\hat{R}$ (vastaavasti $\hat{F} = \hat{R}\hat{G}$) jollain $\hat{G} \in RH^\infty$, jossa dimensiot ovat järkeviä. Siirtofunktioiden $\hat{F} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p_1 \times m})$ ja $\hat{G} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p_2 \times m})$ *suurin yhteinen oikea tekijä* on neliömatriisiarvoinen siirtofunktio $\hat{R} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{R \times m})$, joka jakaa molemmat $\hat{F}$ ja $\hat{G}$ oikealta, ja lisäksi jokainen muu oikea tekijä $\hat{R}'$ jakaa funktion $\hat{R}$. *Suurin yhteinen vasen tekijä* määritellään analogisesti.

MÄÄRITELMÄ 45. (i) *Kaksi siirtofunktiota $\hat{F} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p_1 \times m})$ ja $\hat{G} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p_2 \times m})$ ovat oikealta jaottomia ("yli RH^∞:n") jos $I_{m \times m}$ on eräs niiden suurin yhteinen oikea tekijä (s.y.o.t.).*
(ii) *Analogisesti, $\hat{F} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p \times m_1})$ ja $\hat{G} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p \times m_2})$ ovat vasemmalta jaottomia ("yli RH^∞:n") jos on $I_{p \times p}$ on eräs niiden suurin yhteinen vasen tekijä (s.y.v.t.).*

Skalaaritapauksessa todettiin, että suurin yhteinen tekijä on olemassa silloin kun rengas R on (kommutatiivinen, ykkösellinen) pääideaalialue. Jos taas kaksi matriisia $F, G \in M(R)$ (eli niiden elementit ovat pääideaalialueessa R), on s.y.o.t. olemassa mikäli matriiseilla on yhtä monta pystyrivia. Koska $RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p_1 \times m})$ on pääideaalialue, voidaan tulos kirjoittaa suoraan rationaalisille siirtofunktioille seuraavasti:

LEMMA 46. *Olkoon siirtofunktiot*

$$\hat{F} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p_1 \times m}) \text{ ja } \hat{G} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p_2 \times m}).$$

Tällöin on olemassa $\hat{R} \in s.y.o.t(\hat{F}, \hat{G})$.

TODISTUS. Vidyasagarin kirjassa s. 68 annettu sinänsä elementaari todistus perustuu lohkomatriisin $[F \quad G]^T$ reduktioon yläkolmiomuotoon (nk. Hermiten muoto), kertomalla se oikealta eräällä kääntyvällä R-elementtisellä neliömatriisilla $T \in M(R)$. $\square$

Bezoutin identiteetti on edelleen karakterisaatio, joka toimii matriisiarvoisilla funktioilla.

LEMMA 47. (i) *Kaksi siirtofunktiota $\hat{F} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p_1 \times m})$ ja $\hat{G} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p_2 \times m})$ ovat oikealta jaottomia ("yli RH^∞:n") jos ja vain jos on olemassa siirtofunktiot $\hat{\hat{X}} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p \times p_1})$ ja $\hat{\hat{Y}} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p \times p_2})$ siten että (oikeanpuoleinen) Bezoutin identiteetti*

$$\begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} & \hat{\hat{Y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F} \\ \hat{G} \end{bmatrix} = I_{m \times m}$$

toteutuu.

(ii) *Analogisesti,* $\tilde{\hat{F}}$ *ja* $\tilde{\hat{G}}$ *ovat vasemmalta jaottomia ("yli* RH^∞*:n") jos ja vain jos on olemassa* RH^∞*-siirtofunktiot* $\hat{X}$ *ja* $\hat{Y}$ *siten että (vasemmanpuoleinen) Bezoutin identiteetti*

$$\begin{bmatrix} \tilde{\hat{F}} & \tilde{\hat{G}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = I_{p\times p}$$

toteutuu.

Todistus väitteelle (i) on Vidyasagarin kirjassa korollaarina Lemmaa 46 vastaavalle tulokselle.

Skalaarisen rationaalifunktion esitys osamääränä jaottomista skalaaripolynomeista voidaan yleistää seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 48. *Olkoon* $\hat{G} \in RL^\infty(i\mathbb{R};\mathbb{C}^{p\times m})$ *mielivaltainen aito (siis jonkin lin. systeemin) siirtofunktio.*

(i) *Funktion* $\hat{G}$ *oikea jaoton faktorisointi on siirtofunktion esitys muodossa* $\hat{G} = \hat{N}\hat{M}^{-1}$*, jossa funktio* $s \mapsto \det \hat{M}(s)$ *ei häviä identtisesti, sekä* $\hat{N}, \hat{M} \in RH^\infty$ *ovat oikealta jaottomia ja dimensioiltaan sopivia.*
(ii) *Funktion* $\hat{G}$ *vasen jaoton faktorisointi on siirtofunktion esitys muodossa* $\hat{G} = \tilde{\hat{M}}^{-1}\tilde{\hat{N}}$*, jossa funktio* $s \mapsto \det \tilde{\hat{M}}(s)$ *ei häviä identtisesti, sekä* $\tilde{\hat{N}}, \tilde{\hat{M}} \in RH^\infty$ *ovat oikealta jaottomia ja dimensioiltaan sopivia.*

Jos neliömatriisiarvoinen $\hat{M} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$ on sellainen, että myös $\hat{M}^{-1} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$, sanotaan että $\hat{M}$ on *rationaalinen ulkofunktio.* Voidaan osoittaa, että $\hat{M}$ on ulkofunktio jos ja vain jos sen determinantti $s \mapsto \det \hat{M}(s)$ on kompleksiarvoinen ulkofunktio.

TEHTÄVÄ 49. *Osoita edellinen itse rationaalifunktioille.*

Jokaisella äärellisdimensioisen systeemin (aidolla, rationaalisella) siirtofunktiolla $\hat{G} \in RL^\infty(i\mathbb{R};\mathbb{C}^{p\times m})$ olemassa sekä oikea että vasen jaoton faktorisointi, jotka ovat vielä lisäksi kytkettyjä toisiinsa erityisellä tavalla.

LEMMA 50. *Olkoon* $\hat{G} \in RL^\infty(i\mathbb{R};\mathbb{C}^{p\times m})$ *mielivaltainen lineaarisen systeemin siirtofunktio. Tällöin on olemassa kahdeksan dimensioiltaan yhteensopivaa* RH^∞*-funktiota* $\hat{N}$*,* $\hat{M}$*,* $\tilde{\hat{N}}$*,* $\tilde{\hat{M}}$*,* $\hat{X}$*,* $\hat{Y}$*,* $\tilde{\hat{X}}$ *ja* $\tilde{\hat{Y}}$*, joille*

$$\begin{cases} \hat{G} = \hat{N}\hat{M}^{-1} = \tilde{\hat{M}}^{-1}\tilde{\hat{N}}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{\hat{X}} & -\tilde{\hat{Y}} \\ -\tilde{\hat{N}} & \tilde{\hat{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M} & \hat{Y} \\ \hat{N} & \hat{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{22}$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että Määritelmän 48 jokin jaoton oikea faktorisointi $\hat{G} = \hat{N}\hat{M}^{-1}$ on olemassa. Kirjoitetaan funktion $\hat{G}$ rationaaliset ja kompleksiarvoiset matriisielementtifunktiot $g_{j,k}$ faktorisointeina $g_{j,k} = n_{j,k}/m_{j,k}$, jossa $n_{j,k}, m_{j,k} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$. Olkoon $m \in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ kaikkien nimittäjien $m_{j,k}$ (pienin) yhteinen jaettava pääideaalialueessa $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$, joka on olemassa Proposition 37 perusteella. Tämä tarkoittaa että rationaalifunktio $m/m_{j,k}$ on joukossa $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$ kaikilla j,k, ja jos jokin toinen m' toteuttaa saman ehdon, niin silloin $m|m'$ $RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C})$:ssa. Funktion m nollakohdat ovat (kertalukuineen) leikkaus kaikkien funktioiden $m_{j,k}$ nollakohdista oikeassa puolitasossa $\mathbb{C}_+$.

Määrittelemällä kaikilla paitsi äärellisen monella $s \in \mathbb{C}$

$$\hat{M}_1(s) := m(s)I_{m\times m}, \quad \hat{N}_1(s) := \hat{G}(s)\hat{M}_1(s)$$

saadaan eräs oikea faktorisointi $\hat{G}$:lle, mutta se ei ehkä ole jaoton. Lemman 46 perusteella on olemassa $\hat{E} \in s.y.o.t.(\hat{N}, \hat{M})$, ja voidaan siis kirjoittaa $\hat{M}_1 = \hat{M}\hat{E}$ sekä $\hat{N}_1 = \hat{N}\hat{E}$ eräille $\hat{M} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$ ja $\hat{N} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{p\times m})$. Tämä on oikealta jaoton faktorisointi, koska jos funktioilta $\hat{M}$ ja $\hat{N}$ olisi yhteinen oikea tekijä (ei yksikkö), niin silloin $\hat{E}$ ei olisi yhteisistä tekijöistä suurin.

Symmetrisesti (matriisitransponoinnin avulla) osoitetaan, että myös vasen jaoton faktorisointi $\hat{G} = \hat{\tilde{M}}^{-1}\hat{\tilde{N}}$ on olemassa.

Koska $\hat{M}, \hat{N}$ ovat oikealta jaottomia ja $\hat{\tilde{M}}, \hat{\tilde{N}}$ puolestaan vasemmalta, on olemassa Lemman 47 perusteella funktiot RH^∞:ssa joille pätee

$$\hat{\tilde{X}}\hat{M} - \hat{\tilde{Y}}\hat{N} = I_{m\times m}, \quad -\hat{\tilde{N}}\hat{Y}_1 + \hat{\tilde{M}}\hat{X}_1 = I_{p\times p}.$$

Näillä siirtofunktiolla saadaan jälkimmäinen yhtälöistä (22) melkein toteutumaan. Nimittäin

$$\begin{bmatrix} \hat{\tilde{X}} & -\hat{\tilde{Y}} \\ -\hat{\tilde{N}} & \hat{\tilde{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M} & \hat{Y}_1 \\ \hat{N} & \hat{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & \Delta \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix} \tag{23}$$

jossa $\Delta := \hat{\tilde{X}}\hat{Y}_1 - \hat{\tilde{Y}}\hat{X}_1 \in RH^\infty$. Koska kaikilla $s \in C$ pätee

$$\begin{bmatrix} I_{m\times m} & \Delta(s) \\ 0 & I_{m\times m} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & -\Delta(s) \\ 0 & I_{m\times m} \end{bmatrix},$$

seuraa että $s \mapsto \begin{bmatrix} I_{m\times m} & \Delta(s) \\ 0 & I_{m\times m} \end{bmatrix}$ on rationaalinen ulkofunktio.

Ottamalla determinantti yhtälön (23) molemmista puolista ja huomioimalla että vasemmanpuoleiset lohkomatriisit ovat $m\times m$-matriisiarvoisia RH^∞-funktioita, todetaan että molemmat näistä faktoreista ovat ulkofunktioita. Saadaan

$$\begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\tilde{X}} & -\hat{\tilde{Y}} \\ -\hat{\tilde{N}} & \hat{\tilde{M}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{M} & \hat{Y}_1 \\ \hat{N} & \hat{X}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m\times m} & -\Delta \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\tilde{X}} & -\hat{\tilde{Y}} \\ -\hat{\tilde{N}} & \hat{\tilde{M}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{M} & -\hat{M}\Delta + \hat{Y}_1 \\ \hat{N} & -\hat{N}\Delta + \hat{X}_1 \end{bmatrix},$$

joka todistaa kaavan (22) asettamalla $\hat{Y} := -\hat{M}\Delta + \hat{Y}_1$ ja $\hat{X} := -\hat{N}\Delta + \hat{X}_1$. □

MÄÄRITELMÄ 51. *Yhtälön (22) antama siirtofunktion $\hat{G}$ faktorisointi on nimeltään kaksinkertaisesti jaoton faktorisointi (doubly coprime factorization).*

Yllä oleva todistus on modifioitu Vidyasagarin kirjasta Control System Synthesis, sivuilta 75 ja 79. Francisin kirjassa on (osittain vajavainen) todistus, jossa siirtofunktio $\hat{G}$ ja sen kaksinkertaisesti jaoton faktorisointi on annettu $\hat{G}$:n reaalisaation $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ avulla. Tällöin faktoreille voidaan antaa eksplisiittiset kaavat systeemin generoivien operaattoreiden avulla, olettaen että systeemin Σ puoliryhmän generaattori A osataan stabiloida nk. tilatakaisinkytkennällä

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = Fx(t) + v(t), \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Tarkemmin, faktorisointien löytäminen tila-avaruusmuodossa edellyttää annetulle matriisiparille (A, B) sellaisen *tilatakaisinkytkentämatriisin* F löytämistä (tai edes sellaisen matriisin F olemassaolon osoittamista), jolle $\sigma(A + BF) \subset \mathbb{C}_-$. Tämä ei ole lainkaan triviaali tehtävä, ja silloin kun se ratkeaa, sanotaan parin (A, B) olevan *stabiloituva*. Onneksi mielivaltaiselle aidolle rationaalifunktiolle $\hat{G}$ voidaan löytää (esim. minimaalinen) reaalisaatio, joka toteuttaa tämän ehdon.

Kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin avulla saadaan vielä yksi karakterisaatio siirtofunktioiden vasemmalle jaottomuudelle.

KOROLLAARI 52. (i) *Olkoon $\hat{N} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; C^{p\times m})$ ja $\hat{M} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; C^{m\times m})$ mielivaltaisia, ja oletetaan että* $\det \hat{M}$ *ei häviä identtisesti. Tällöin $\hat{N}$ ja $\hat{M}$ ovat oikealta jaottomia jos ja vain jos on olemassa siirtofunktiot $\hat{U} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; C^{m\times p})$ ja $\hat{V} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; C^{p\times p})$ siten että*

$$\begin{bmatrix} \hat{M} & \hat{U} \\ \hat{N} & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; C^{(m+p)\times(m+p)}).$$

(ii) *Duaalisesti, oletetaan että* $\hat{\tilde{M}} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; C^{p\times p})$, $\hat{\tilde{N}} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; C^{p\times m})$ *ovat mielivaltaisia ja* $\det \hat{\tilde{M}}$ *ei häviä identtisesti. Tällöin* $\hat{\tilde{M}}$ *ja* $\hat{\tilde{N}}$ *ovat vasemmalta jaottomia, jos ja vain jos on olemassa siirtofunktiot* $\hat{\tilde{U}} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; C^{m\times p})$ *ja* $\hat{\tilde{V}} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; C^{p\times p})$ *siten että*

$$\begin{bmatrix} \hat{\tilde{M}} & \hat{\tilde{N}} \\ \hat{\tilde{U}} & \hat{\tilde{V}} \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; C^{(m+p)\times(m+p)}).$$

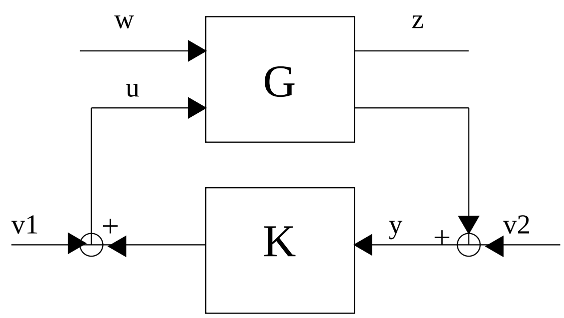
Ensimmäinen väite seuraa kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin olemassaolosta funktiolle $\hat{G} := \hat{N}\hat{M}^{-1}$.

Francisin kirjassa on annettu todistus nk. Smithin kanonisen muodon avulla, jolloin toisen faktoreista ei tarvitse edes olla neliömatriisiarvoinen. Tätä yleistystä ei kuitenkaan tarvita tässä yhteydessä

6. Stabilointitehtävä

6.1. Stabiloituvuus. Aloitamme nelilohko-ongelman stabiilisuustarkastelut kirjoittamalla vanha tuttu nelilohkokaavio uudelleen jaottomien faktorisointien avulla. Siinä tapauksessa, että alkuperäisen nelilohko-ongelman takaisinkytkentä on hyvinasetettu Määritelmän 53 mielessä, saadaan lemman 55 korollaarina RH^∞-faktorisointi standardiongelman täydelliselle siirtofunktiolle $\hat{H}_{G,K}$.

MÄÄRITELMÄ 53. *Olkoon* $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ *ja* $\hat{K}$ *aitoja* $RL^\infty(i\mathbb{R})$ *siirtofunktioita, jotka määrittelevät standardiongelman takaisinkytkentäkaavion Jos* $1 \notin \sigma(\hat{K}(\infty)\hat{G}_{22}(\infty))$ *sanotaan että* $\hat{G}$*:n ja* $\hat{K}$*:n määrittämä*



KUVA 5. Standardiongelman takaisinkytkentäkaavio

takaisin- kytkentäkaavio on hyvin asetettu.

PROPOSITIO 54. *Olkoon kaikki kuten Määritelmässä 53. Seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) *Siirtofunktioiden* $\hat{G}$*:n ja* $\hat{K}$*:n määrittämä takaisinkytkentäkaavio on hyvin asetettu,*
(ii) $1 \notin \sigma(\hat{G}_{22}(\infty)\hat{K}(\infty))$, *ja*
(iii) *sekä* $\begin{bmatrix} I & -\hat{K}(\infty) \\ -\hat{G}_{22}(\infty) & I \end{bmatrix}$ *että* $\begin{bmatrix} I & \hat{K}(\infty) \\ \hat{G}_{22}(\infty) & I \end{bmatrix}$ *ovat kääntyviä matriiseja*

TODISTUS. Koska jokaisille rajoitetuille lineaariselle operaattorille A, B pätee $\{0\} \cup \sigma(AB) = \{0\} \cup \sigma(BA)$ ja $1 \neq 0$, ovat väitteet (i) ja (ii) ekvivalentteja.

Edelleen, jokaisille rajoitetuille lineaariselle operaattorille A, B pätee
$$\begin{bmatrix} I & A \\ B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A \\ -B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - AB & 0 \\ 0 & I - BA \end{bmatrix}.$$
Selvästi ekvivalentit väitteet (i) ja (ii) yhdessä implikoivat väitteen (iii). Käänteinen suunta on niin ikään triviaali.

□

Hyvinasetettuusehto selvästi toteutuu kaikilla aidoilla rationaalisilla $\hat{K}$, jos siirtofunktio $\hat{G}_{22}$ on täysin aito eli $\hat{G}_{22}(\infty) = 0$ [15]. Joudumme olettamaan tämän Lauseen 59 käänteisessä suunnassa. Ratkaisemalla Tehtävä 34 huomataan, että mikäli $\hat{G}$:n ja $\hat{K}$:n määrittämä takaisinkytkentäkaavio on hyvin asetettu Määritelmän (53) mielessä, lineaarinen kuvaus

$$H_{G,K} : \begin{bmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix}$$

on hyvin määritelty. Lisäksi kuvaus voidaan kirjoittaa aidon $RL^\infty(i\mathbb{R})$-siirto- funktion $\hat{H}_{G,K}$ avulla.

Lemma 55. *Olkoon $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ ja $\hat{K}$ nelilohko-ongelmaan liittyviä aitoja $RL^\infty(i\mathbb{R})$ siirtofunktioita. Olkoon $\hat{G} = \hat{N}\hat{M}^{-1}$ ja $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1}$ siirtofunktioiden eräät oikealta jaottomat faktorisoinnit. Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) *Siirtofunktioiden $\hat{G}$:n ja $\hat{K}$:n määrittämä takaisinkytkentäkaavio on hyvin asetettu Määritelmän (53) mielessä, ja syötteet w, v_1, ja v_2 ovat Laplace-muuntuvia.*

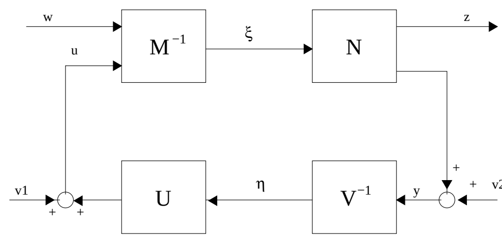
Standardiongelman takaisinkytkentäkaavion määrittelemä lineaarinen kuvaus

$$H_{G,K} : \begin{bmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix}$$

kaaviossa merkittyjen signaalien välillä on erään lineaarisen systeemin Toeplitz-operaattori, joten vastaava siirtofunktio $\hat{H}_{G,K}$ on aito ja toteuttaa $\hat{H}_{G,K} \in L^\infty(i\mathbb{R})$. Myös loput signaalit z, u, ja y ovat Laplace-muuntuvia.

(ii) *Jaottomien faktorisointien $\hat{G} = \hat{N}\hat{M}^{-1}$ ja $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1}$ avulla uudelleen kirjoitetussa standardiongelman takaisinkytkentäkaaviossa olevat uudet signaalit ξ ja η ovat Laplace-muuntuvia, ja ne to-*

[15]Näyttäisi, että päästään aika pitkälle olettamalla ainoastaan että $\left[\begin{smallmatrix} I & -\hat{K}(\infty) \\ -\hat{G}_{22}(\infty) & I \end{smallmatrix}\right]$ on kääntyvä.



KUVA 6. Standardiongelma faktorisoidussa muodossa

teuttavat aikatason yhtälöt

$$\begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ M_2 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v_1 \end{bmatrix} \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -U \end{bmatrix} \\ -N_2 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \tag{25}$$

jossa on hajoteltu standardiongelman takaisinkytkentäkaavion signaalien mukaan $\left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{smallmatrix}\right]$ *ja* $\hat{N} = \left[\begin{smallmatrix} \hat{N}_1 & \hat{N}_2 \end{smallmatrix}\right]$.

Toeplitz-operaattoria $\left[\begin{smallmatrix} \left[\begin{smallmatrix} M_1 \\ M_2 \end{smallmatrix}\right] \\ -N_2 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -U \end{smallmatrix}\right] \\ V \end{smallmatrix}\right]$ *vastaava* RH^∞*-siirtofunktio on ei-singulaarinen (eli sen determinantti ei identtisesti häviä joukossa* $\mathbb{C}_+$*), ja sen inverssi on aito* $RL^\infty(i\mathbb{R})$*-siirtofunktio.*

Myös loput signaalit w, v_1, v_2, z, u, *ja* y *ovat Laplace-muuntuvia.*

TODISTUS. Tässä todistuksessa täytyy hetki miettiä ja huolehtia, että tarvittavat inverssit ovat aitoja siirtofunktioita. Se jääköön lukijalle meditaatioharjoitukseksi.

Selvästi voidaan faktorisoida neliömatriisiarvoisten rationaalifunktioiden tulona

$$\hat{R} := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -N_2 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{K} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\hat{G}_{21} & -\hat{G}_{22} \end{bmatrix} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{bmatrix}.$$

Siirtofunktion $\left[\begin{smallmatrix} \hat{M} & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{smallmatrix}\right]$ determinantti on skalaarinen rationaalifunktio $s \mapsto \det \hat{M}(s) \det \hat{V}(s)$, joka ei häviä identtisesti jaottoman faktorisoinnin määritelmän perusteella. Edellisen faktorin determinantti on taas yhtä kuin

$$\det \begin{bmatrix} I & -\hat{K} \\ -\hat{G}_{22} & I \end{bmatrix},$$

joka ei häviä identtisesti hyvinasetettuusoletuksen perusteella.

Niinpä siirtofunktion $\hat{R}$ determinantti ei häviä identtisesti, ja sen pisteittäinen inverssi $\hat{R}^{-1}$ on olemassa $RL^\infty(i\mathbb{R})$-siirtofunktiona, joka on lisäksi aito. $\square$

Oikealta jaottomien faktorisointien $\hat{G} = \hat{N}\hat{M}^{-1}$ ja $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1}$ pääidea selviää seuraavasta korollaarista:

KOROLLAARI 56. *Olkoon $\hat{G}$, $\hat{N}$, $\hat{M}$, $\hat{N}_2$, $\hat{M}_1$, $\hat{M}_2$, $\hat{K}$, $\hat{U}$ ja $\hat{V}$ kuten Lemmassa 55. Oleta lisäksi että Määritelmän 53 ehto standardiongelman takaisinkytkentä- kaavion hyvinasetettuudelle on voimassa. Tällöin takaisinkytkentäkaavion määrittelemä siirtofunktio $\hat{H}_{G,K}$ voidaan faktorisoida kahden aidon siirtofunktion tulona*

$$\hat{H}_{G,K} = \begin{bmatrix} \hat{N}_1 & 0 \\ \hat{M}_2 & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1}.$$

joista ensimmäinen on avaruudessa RH^∞ ja jälkimmäinen $RL^\infty(i\mathbb{R})$.

TODISTUS. Seuraa välittömästi edellisen lemman todistuksesta, katsomalla yhtälöitä (24) ja (25). $\square$

LAUSE 57. *Olkoon $\hat{G}$, $\hat{N}$, $\hat{M}$, $\hat{N}_2$, $\hat{M}_1$, $\hat{M}_2$, $\hat{K}$, $\hat{U}$ ja $\hat{V}$ kuten Lemmassa 55. Oleta lisäksi että Määritelmän 53 ehto takaisinkytkentäkaavion hyvinasetettuudelle on voimassa. Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) *Siirtofunktio $\hat{K}$ on stabiloiva säätäjä siirtofunktiolle $\hat{G}$ standardiongelman takaisinkytkentäkaavion kytkennässä.*
(ii)

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{(m+p)\times(m+p)}).$$

TODISTUS. Että väite (ii) implikoi väitteen (i), seuraa Korollaarista 56, koska $\hat{H}_{G,K}$:n faktorisoinnin oikeanpuoleinen tekijä on määritelmän mukaan RH^∞:ssä.

Käänteisen suunnan todistus perustuu faktorisointien oikealta jaottomuuteen, joka tulkitaan Bezoutin identiteetin avulla erään operaattorin käänty- vyydeksi vasemmalta. Faktorisointimuodossa annetun standardiongelman takaisinkytkentäkaavion ja Lemman 55 perusteella saadaan

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{N}_1 & 0 \\ \hat{M}_2 & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{N}_2 & 0 \\ \hat{M}_1 & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{y} - \hat{v}_2 \\ \hat{w} \\ \hat{u} - \hat{v}_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Koska $\hat{N}$, $\hat{M}$, sekä $\hat{U}$, $\hat{V}$ ovat oikealta jaottomia, Bezoutin identiteetin nojalla on olemassa RH^∞-siirtofunktiot $\hat{\hat{X}}_1$, $\hat{\hat{X}}_2$, $\hat{\hat{Y}}_1$ $\hat{\hat{Y}}_2$, $\hat{\hat{A}}_1$ ja $\hat{\hat{A}}_2$ siten että

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}}_1 & \hat{\hat{Y}}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\hat{A}}_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}}_2 & \hat{\hat{Y}}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\hat{A}}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{N}_1 & 0 \\ \hat{M}_2 & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{N}_2 & 0 \\ \hat{M}_1 & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Kahdesta edellisestä yhtälöstä yhdistelemällä saadaan

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}}_1 & \hat{\hat{Y}}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\hat{A}}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}}_2 & \hat{\hat{Y}}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\hat{A}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y} - \hat{v}_2 \\ \hat{w} \\ \hat{u} - \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}}_1 & \hat{\hat{Y}}_2 & \hat{\hat{X}}_2 \\ 0 & \hat{\hat{A}}_2 & \hat{\hat{A}}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\hat{Y}}_1 & 0 & -\hat{\hat{X}}_2 \\ 0 & -\hat{\hat{A}}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Koska $\left[\begin{smallmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \\ \hat{y} \end{smallmatrix}\right] = \hat{H}_{G,K} \left[\begin{smallmatrix} \hat{w} \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $\hat{H}_{G,K} \in RH^\infty$, väite (ii) seuraa. □

Edellisen Lauseen väite (ii) voitaisin lausua yhtäpitävässä muodossa, että annettu lohkomatriisisiirtofunktio on itseasiassa matriisiarvoinen ulkofunktio.

Stabiloituvuudesta puhutaan, kun annetulle $\hat{G}$ voidaan löytää jokin säätäjä $\hat{K}$, jolla suljetun loopin systeemi on kaikkien signaaliensa puolesta hyvin määritelty ja stabiili. Formaalimmin:

MÄÄRITELMÄ 58. *Sanotaan että siirtofunktio* $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ *on stabiloituva, jos on olemassa aito* $RL^\infty(i\mathbb{R})$*-säätäjäsiirtofunktio* $\hat{K}$*, siten että*

(i) $\hat{G}$ *ja* $\hat{K}$ *toteuttavat Määritelmän 53 hyvinasetettuus-ehdon, ja*
(ii) *standardiongelman takaisinkytkentäkaavion määrittelemä siirtofunktio* $\hat{H}_{G,K} \in RH^\infty$.

Mikäli käytettävissä on sellainen taltta, jolla annettu RH^∞-siirtofunktio voidaan pilkkoa keskenään oikealta jaottomiksi tekijöiksi, voidaan näiden avulla antaa täydellinen karakterisaatio stabiloituvuudelle mikäli vahvempi hyvinasetettuusehto $\hat{G}_{22}(\infty) = 0$ oletetaan.

LAUSE 59. *Olkoon* $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ *standardiongelmaan liittyvä aito* $RL^\infty(i\mathbb{R})$*-siirtofunktio. Olkoon* $\hat{G} = \hat{N}\hat{M}^{-1}$ *sen eräs oikealta jaoton faktorisointi. Hajotetaan faktorit* $\hat{M} = \left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{smallmatrix}\right]$ *ja* $\hat{N} = \left[\begin{smallmatrix} \hat{N}_1 & \hat{N}_2 \end{smallmatrix}\right]$ *standardiongelman takaisin- kytkentäkaavion signaalien mukaan.*

Nimetään väitteet seuraavasti:

(i) *Siirtofunktio* $\hat{G}$ *on stabiloituva Määritelmän 58 mielessä.*
(ii) *Siirtofunktiot* $\hat{M}$ *ja* $\hat{N}_2$ *ovat oikealta jaottomia, sekä* $\left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{smallmatrix}\right]$ *ja* $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ I \end{smallmatrix}\right]$ *ovat vasemmalta jaottomia.*

Tällöin (i) $\Rightarrow$ *(ii). Jos lisäksi* $\hat{G}_{22}(\infty) = 0$*, niin myös (ii)* $\Rightarrow$ *(i).*

TODISTUS. Oleta (i). Jos $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1}$ stabiloi $\hat{G}$:n, niin silloin Lauseen 57 perusteella $\hat{M}$ ja $\hat{N}_2$ ovat oikealta jaottomia, käyttämällä Korollaarissa 52 annettua oikealta jaottomuusehtoa. Saman korollaarin vasemmalta jaottomuusehto implikoi, että $\left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -I \end{smallmatrix}\right]\hat{U}$ ovat vasemmalta jaottomia eräälle $\hat{U}$ joka on peräisin oletetun stabiloivan säätäjän $\hat{K}$ oikealta jaottomasta faktorisoinnista. Bezoutin vasemmanpuoleinen identiteetistä seuraa triviaalisti, että $\left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -I \end{smallmatrix}\right]\hat{U}$ ovat niin ikään vasemmalta jaottomia.

Oleta (ii). Korollaarin 52 perusteella on olemassa $\hat{X}, \hat{Y} \in RH^\infty$ siten että neliömatriisifunktio

$$\begin{bmatrix} \hat{M} & \hat{X} \\ -\hat{N}_2 & \hat{Y} \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty.$$

Edelleen, koska $\left[\begin{smallmatrix}\hat{M}_1\\ \hat{M}_2\end{smallmatrix}\right]$ ja $\left[\begin{smallmatrix}0\\ I\end{smallmatrix}\right]$ ovat vasemmalta jaottomia, on olemassa $\hat{R}, \hat{T} \in RH^\infty$ siten että Bezoutin identiteetti

$$\begin{bmatrix}\hat{M}_1\\ \hat{M}_2\end{bmatrix}\hat{R} + \begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}\hat{T} = -I_{m\times m} \tag{26}$$

toteutuu. Määrittele $\hat{U} := \hat{T}\hat{X}$ ja $\hat{V} := \hat{Y} - \hat{N}_2\hat{R}\hat{X}$. Kertomalla yhtälö (26) oikealta $\hat{X}$:llä, ja järjestelemällä termejä saadaan

$$\hat{M}\hat{R}\hat{X} + \hat{X} = \begin{bmatrix}0\\ -U\end{bmatrix}.$$

Suoralla laskulla saadaan nyt

$$\begin{bmatrix}\hat{M} & \hat{X}\\ -\hat{N}_2 & \hat{Y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & \hat{R}\hat{X}\\ 0 & I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{M}_1\\ \hat{M}_2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ -\hat{U}\end{bmatrix}\\ -\hat{N}_2 & \hat{V}\end{bmatrix} \tag{27}$$

Selvästi $\left[\begin{smallmatrix}I & \hat{R}\hat{X}\\ 0 & I\end{smallmatrix}\right]^{-1} = \left[\begin{smallmatrix}I & -\hat{R}\hat{X}\\ 0 & I\end{smallmatrix}\right] \in RH^\infty$, ja seuraa että $\left[\begin{smallmatrix}\left[\begin{smallmatrix}\hat{M}_1\\ \hat{M}_2\end{smallmatrix}\right] & \left[\begin{smallmatrix}0\\ -\hat{U}\end{smallmatrix}\right]\\ -\hat{N}_2 & \hat{V}\end{smallmatrix}\right]^{-1} \in RH^\infty$. Mikäli $\hat{U}$ ja $\hat{V}$ olisivat "kelvollisia", niin Lauseen 57 perusteella $\hat{K} := \hat{U}\hat{V}^{-1}$ olisi eräs stabiloiva säätäjä.

Tarkistetaan ensin, että V^{-1} on järjellinen aito $RL^\infty(i\mathbb{R})$-siirtofunktio, jolloin $\hat{K}$ olisi edes hyvin määritelty. Selvästi

$$\begin{bmatrix}\hat{M} & \begin{bmatrix}0\\ -\hat{U}\end{bmatrix}\\ -\hat{N}_2 & \hat{V}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ -\hat{U}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}-\hat{G}_{21} & -\hat{G}_{22}\end{bmatrix} & \hat{V}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{M} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}.$$

Ottamalla determinantit molemmista puolista, saadaan

$$\det\begin{bmatrix}\hat{M} & \begin{bmatrix}0\\ -\hat{U}\end{bmatrix}\\ -\hat{N}_2 & \hat{V}\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}I & -\hat{U}\\ -\hat{G}_{22} & \hat{V}\end{bmatrix}\cdot\det\hat{M},$$

ja evaluoimalla tämä pisteessä ∞ huomataan että $\left[\begin{smallmatrix}I & -\hat{U}(\infty)\\ -\hat{G}_{22}(\infty) & \hat{V}(\infty)\end{smallmatrix}\right]$ on kääntyvä. Koska tämän käänteisen suunnan todistuksessa on lisäksi oletettu $\hat{G}_{22}(\infty) = 0$, seuraa että $\hat{V}(\infty)$ on kääntyvä. Niinpä $\hat{K} := \hat{U}\hat{V}^{-1}$ on hyvin määritelty rationaalinen siirtofunktio.

Koska yhtälön (27) oikea puoli on todettu kääntyväksi avaruudessa RH^∞, seuraa Korollaarin 52 perusteella että $\hat{V}$ ja $\begin{bmatrix}0\\ -\hat{U}\end{bmatrix}$ sekä myös $\hat{V}$ ja $\hat{U}$ ovat oikealta jaottomia. Tämä todistaa lauseen. $\square$

TEHTÄVÄ 60. Annetulle $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{smallmatrix}\right]$ määrittelemälle stabilointiongelmalle voidaan määritellä duaalinen stabilointiongelma korvaamalla siirtofunktio siirtofunktiolla $\hat{G}^{\circ}(s) := \hat{G}(\overline{s})^*$. Osoita että $\hat{G}$:lle on olemassa stabiloiva säätäjä jos ja vain jos $\hat{G}^{\circ}$:lle on. Tästä saadaan kolmas, ekvivalentti ehto Lauseeseen 59, $\hat{G}$:n vasemmanpuoleisen jaottoman faktorisoinnin avulla.

Aikaisemmin vihjattiin, että $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right]$ lohkotun siirtofunktion matriisielementti G_{22} olisi jotenkin erikoisasemassa stabilointitehtävään nähden. Nyt on tullut aika täsmentää tätä. Aloitetaan määritelmällä.

Määritelmä 61. *Olkoon siirtofunktio* $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{smallmatrix}\right] \in RL^{\infty}(i\mathbb{R})$ *kuten edellä. Sanotaan että* $\hat{K} \in RL^{\infty}(i\mathbb{R})$ *stabiloi* $\hat{G}_{22}$*:n jos*

(i) *Määritelmän 53 hyvinasetettuusehto toteutuu, ja*
(ii) *kuvausta*

$$G^{\circ}_{G,K} : \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

vastaava siirtofunktio $\hat{G}^{\circ}_{G,K}$ *on joukossa* RH^{∞}*, jossa signaalien väliset relaatiot ovat*

$$\begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix} = H_{G,K} \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Lause 62. *Olkoon siirtofunktio* $\hat{G} = \left[\begin{smallmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{smallmatrix}\right] \in RL^{\infty}(i\mathbb{R})$ *stabiloituva Määritelmän 58 mielessä. Olkoon* $\hat{K} \in RL^{\infty}(i\mathbb{R})$ *sellainen aito siirtofunktio, jolle standardiongelman takaisinkytkentäkaavio on signaalien dimensioiden puolesta mielekäs. Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) *Siirtofunktio* $\hat{K} \in$ *stabiloi* $\hat{G}$*:n.*
(ii) *Siirtofunktio* $\hat{K} \in$ *stabiloi* $\hat{G}_{22}$*:n.*

Todistus. Triviaalisti väite (i) implikoi väitteen (ii).

Oleta väite (ii). Tarkastellaan ensin mitä vanhalle tutulle takaisinkytkentäkaaviolle kuuluu kun sen ulkoinen syöte $\tilde{w} = 0$. Lauseen 57 todistuksesta saadaan samaa notaatiota käyttämällä, kun $\tilde{w} = 0$

$$
\begin{aligned}
(28)\qquad \begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\nu} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{\tilde{Y}}_2 & \hat{\tilde{X}}_2 \\ \hat{\tilde{A}}_2 & \hat{\tilde{A}}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\tilde{X}}_2 \\ -\hat{\tilde{A}}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} + \hat{\tilde{X}}_1 \hat{z} \\
&= \left(\begin{bmatrix} \hat{\tilde{Y}}_2 & \hat{\tilde{X}}_1 \\ \hat{\tilde{A}}_2 & \hat{\tilde{A}}_1 \end{bmatrix} \hat{G}^{\circ}_{G,K} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\hat{\tilde{X}}_2 \\ 0 & -\hat{\tilde{A}}_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} + \hat{\tilde{X}}_1 \hat{z}
\end{aligned}
$$

kaikille syötteille $\hat{v}_1, \hat{v}_2 \in H^2$ (tai ainakin tiheälle joukolle, jotka ovat jatkuvia imaginaariakselilla). Koska $\hat{G}^{\circ}_{G,K} \in RH^{\infty}$ oletuksen mukaan ja kaikki matriisielementit ovat määäritelmiensä mukaan RH^{∞}:ssä, saadaan siirtofunktio $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{smallmatrix}\right] \mapsto \left[\begin{smallmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\nu} \end{smallmatrix}\right]$ luokkaan RH^{∞} jos siirtofunktio $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{smallmatrix}\right] \mapsto \hat{z}$ on RH^{∞}:ssa. Koska selvästi $\hat{z} = \hat{N}_2 \hat{\xi}$, jossa $\xi = \xi(v_1, v_2)$, riittää siis osoittaa että siirtofunktio $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{smallmatrix}\right] \mapsto \xi$ on RH^{∞}:ssa.

Koska $\hat{G}$ on stabiloituva, Lause 59 sanoo että on olemassa (Bezoutin identiteetin nojalla) RH^{∞}-funktiot $\hat{\tilde{R}}$ ja $\hat{\tilde{T}}$ siten että $\hat{\tilde{R}}\hat{M} - \hat{\tilde{T}}\hat{N}_2 = I$. Koska

$$
\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{M}\hat{\xi} - \begin{bmatrix} 0 \\ U\eta \end{bmatrix} \\ \hat{N}_2 \hat{\xi} + \hat{V}\eta \end{bmatrix},
$$

niin saadaan

$$
\begin{aligned}
\hat{\tilde{R}} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} + \hat{\tilde{T}} \hat{v}_2 &= \left(\hat{\tilde{R}}\hat{M} - \hat{\tilde{T}}\hat{N}_2 \right) \hat{\xi} - \hat{\tilde{R}} \begin{bmatrix} 0 \\ U\hat{\eta} \end{bmatrix} + \hat{\tilde{T}}\hat{V}\hat{\eta} \\
&= \xi - \hat{\tilde{R}} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u} - \hat{v}_1 \end{bmatrix} + \hat{\tilde{T}}\hat{y},
\end{aligned}
$$

koska $\hat{y} = \hat{V}\hat{\eta}$ ja $U\hat{\eta} = \hat{u} - \hat{v}_1$. Termejä siirtelemällä saadaan

$$\begin{aligned}
\xi &= \hat{\tilde{R}}\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} + \hat{\tilde{T}}\hat{v}_2 + \hat{\tilde{R}}\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u} - \hat{v}_1 \end{bmatrix} - \hat{\tilde{T}}\hat{y} = \hat{\tilde{T}}\hat{v}_2 - \hat{\tilde{T}}\hat{y} + \hat{\tilde{R}}\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{\tilde{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\tilde{R}}\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ -\hat{\tilde{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{\tilde{T}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\tilde{R}}\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ -\hat{\tilde{T}} \end{bmatrix} \hat{G}^{\circ}_{G,K} \right) \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Koska kaikki yllä olevan yhtälön siirtofunktiot ovat RH^∞:ssä saadaan yhtälön (26) kanssa estimaatti

$$|| \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} ||_2 \leq C_1 \, || \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} ||_2 \tag{29}$$

jollekin vakiolle $C_1 < \infty$.

Seuraavaksi tarkastellaan täysin vastakkaista tapausta, jossa takaisinkytkentä- kaavion signaaleista häviävät ulkoiset häiriöt $\hat{v}_1$ ja $\hat{v}_2$, mutta $\hat{w}$ sen sijaan saa elää vapaasti taajuustasossa. Määritellään nyt signaalit $\hat{\xi}$ ja $\hat{\nu}$ kaavalla

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Koska Lauseen 59 mukaan $\left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ I \end{smallmatrix}\right]$ ovat vasemmalta jaottomia, on olemassa (jälleen Bezoutin identiteetin nojalla) RH^∞-funktiot $\hat{R}$ ja $\hat{T}$ siten että $\hat{M}\hat{R} - \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ I \end{smallmatrix}\right]\hat{T} = I$. Määritellään uudet muuttujat

$$\begin{cases} \hat{\xi}' := \hat{\xi} - \hat{R}\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\hat{w} \\ \hat{\eta}' := \hat{\eta}, \end{cases} \tag{30}$$

ja huomataan että

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}' \\ \hat{\eta}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_1' \end{bmatrix} \\ v_2' \end{bmatrix},$$

jossa

$$\begin{cases} \hat{v}_1' := \hat{T}\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\hat{w} \\ \hat{v}_2' := \hat{N}_2\hat{R}\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\hat{w}. \end{cases}$$

Olemme päässeet siis näissä uusissa koordinaateissa tapaukseen, jota käsiteltiin tämän todistuksen ensimmäisessä osassa. Kuvausta $\hat{w} \mapsto \left[\begin{smallmatrix} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ v_1' \end{smallmatrix}\right] \\ v_2' \end{smallmatrix}\right]$ vastaava siirtofunktio on joukossa RH^∞ suoraan näiden uusien signaalien määritelmän perusteella. Kuvausta $\left[\begin{smallmatrix} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ v_1' \end{smallmatrix}\right] \\ v_2' \end{smallmatrix}\right] \mapsto \left[\begin{smallmatrix} \hat{\xi}' \\ \hat{\eta}' \end{smallmatrix}\right]$ siirtofunktio on puolestaan joukossa RH^∞ tämän todistuksen ensimmäisen osan lopputuloksen, estimaatin (27) perusteella. Niinpä on olemassa vakio $C_2 < \infty$, jolle

$$|| \begin{bmatrix} \hat{\xi}' \\ \hat{\eta}' \end{bmatrix} ||_2 \le C_2 \, || \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hat{0} \end{bmatrix} ||_2$$

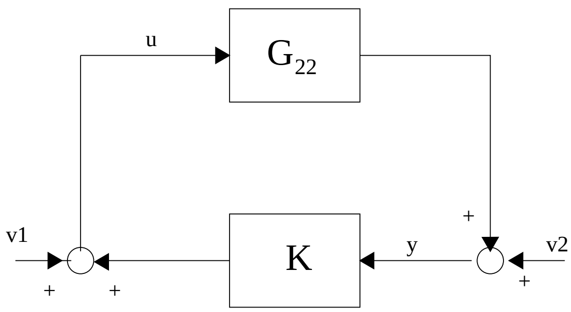
ja tästä suoraan yhtälön (30) alkuperäisten muuttujien $\hat{\xi}$ ja $\hat{\eta}$ avulla

$$(31) \qquad || \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{U} \end{bmatrix} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} ||_2 = || \begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} ||_2 \le C_3 \, || \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hat{0} \end{bmatrix} ||_2$$

eräällä vakiolla $C_3 < \infty$, mielivaltaiselle taajuustason signaalille $\hat{w}$. Lause on nyt todistettu yhdistämällä estimaatit (29) ja (31), ja soveltamalla Lausetta 57. $\square$

Mikä onkaan edellisen lauseen idea? Mikäli stabilointiongelma on ratkeava, niin silloin riittää valita säätäjä $\hat{K}$ siten, että takaisinkytkentäsilmukan "sisäinen osa" stabiloituu. Tämä sisäinen osa muodostuu pelkästään siirtofunktioista $\hat{G}_{22}$ ja $\hat{K}$. Standardiongelman kaaviossa muut kolme siirtofunktiota $\hat{G}_{11}$, $\hat{G}_{12}$ ja $\hat{G}_{21}$ ovat eräässä mielessä silmukan "ulkopuolinen osa", joka on käyttäytyy hyvin kunhan systeemi on stabiloituva ylipäätään jollain säätäjällä $\hat{K}$. Stabiloituvuusoletus on siis eräänlainen tapa vaatia, että siirtofunktiot $\hat{G}_{11}$, $\hat{G}_{12}$ ja $\hat{G}_{21}$ ovat jo "valmiiksi kilttejä", mutta viimeinen osa (johon säätäjän valinta aidosti "puree") saattaa olla "ikävä".

6.2. Stabiloivien säätäjien Joula-parametrisointi. Edellisen luvun Lauseessa 62 osoitettiin että *stabiloituvan* siirtofunktion $\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{bmatrix}$ stabiloimiseksi $\hat{K}$:lla on välttämätöntä ja riittävää stabiloida pelkästään siirtofunktio $\hat{G}_{22}$ Määritelmän 61 mielessä. Tämä on selvästi ekvivalenttia sen stabilointiongelman ratkaisemiseksi, jossa muut siirtofunktiot $\hat{G}_{11}$, $\hat{G}_{12}$ ja $\hat{G}_{21}$ häviävät tai niitä vastaavat signaaliavaruudet ovat "nollaulotteisia". Kysymys on siis seuraavan yksinkertaistetun standardiongelman takaisinkytkentäkaavion stabiloimisesta: Huomaa,



KUVA 7. Yksinkertaistettu standardiongelma

että kaavio on täsmälleen standardiongelman takaisinkytkentäkaavio, josta ulkoinen syöte w ja vaste z on poistettu. Aikaisemmissa tarkasteluissa ei ole mitään sellaista, joka kieltäisi näiden signaalien poistamisen[16].

Stabilointiongelman tehtävänä oli nimen omaan *parametrisoida* kaikki stabiloivat säätäjät $\hat{K}$ annetulle $\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{bmatrix}$, ja tätä kutsutaan kirjallisuudessa Joula-parametrisoinniksi[17]. Tehtävän ratkaisu jakautuu edellisen luvun stabiloituvuustarkastelun nojalla kahteen tapaukseen:

(i) Jos $\hat{G}$ ei ole ylipäätään stabiloituva Määritelmän 58 mielessä, niin stabiloivien säätäjien joukko on tyhjä.
(ii) Jos $\hat{G}$ on stabiloituva, stabiloivien säätäjien $\hat{K}$ parametrisointi on ekvivalentti $\hat{G}_{22}$:n määräämän yksinkertaistetun stabilointitehtävän ratkaisujoukon löytämiselle.

Tässä luvussa ratkaisemme siis stabilointitehtävän yksinkertaistetussa muodossaan. Kirjoitamme seuraavassa aina $\hat{G} = \hat{G}_{22}$, $\hat{M} = \hat{M}_2$, $\hat{N} = \hat{N}_2$, $\hat{\hat{M}} = \hat{\hat{M}}_2$ ja $\hat{\hat{N}} = \hat{\hat{N}}_2$, ja sovellamme aikaisemmin saatuja tuloksia. Tällöin Lauseen 57 stabilointiehto saa seuraavan muodon:

[16]Ts. olettamasta että signaalit w ja z ovat mielivaltaisia aikatason jatkuvia funktioita, joiden arvot ovat nollaulotteisessa vektoriavaruudessa $\{0\}$. (Tämä ei ole huono vitsi, vaan **puhdasta** matematiikkaa.)

[17]Joulan nimen rinnalla esiintyy usein myös nimi Buongiorno (oikeinkirjoitus?)

LEMMA 63. *Olkoon $\hat{G}_{22}$ aito RL^∞-siirtofunktio, ja $\hat{G}_{22} = \hat{N}_2\hat{M}_2^{-1} = \hat{\tilde{M}}_2^{-1}\hat{\tilde{N}}_2$ sen eräs sen oikea ja vasen jaoton faktorisointi. Olkoon säätäjä $\hat{K}$ aito RL^∞-siirtofunktio, ja $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1} = \hat{\tilde{V}}^{-1}\hat{\tilde{U}}$ eräs sen oikea ja vasen jaoton faktorisointi. Oleta lisäksi että Määritelmän 53 ehto takaisinkytkentäkaavion hyvinasetettuudelle on voimassa. Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:*

(i) *Siirtofunktio $\hat{K}$ on stabiloiva säätäjä siirtofunktiolle $\hat{G}_{22}$ yksinkertaistetun standardiongelman takaisinkytkentäkaavion kytkennässä.*

(ii)
$$\begin{bmatrix} \hat{M}_2 & -\hat{U} \\ -\hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{(m+p)\times(m+p)}).$$

(iii)
$$\begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{U} \\ \hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{(m+p)\times(m+p)}).$$

(iv)
$$\begin{bmatrix} \hat{\tilde{V}} & -\hat{\tilde{U}} \\ -\hat{\tilde{N}}_2 & \hat{\tilde{M}}_2 \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{(m+p)\times(m+p)}).$$

(v)
$$\begin{bmatrix} \hat{\tilde{V}} & \hat{\tilde{U}} \\ \hat{\tilde{N}}_2 & \hat{\tilde{M}}_2 \end{bmatrix}^{-1} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{(m+p)\times(m+p)}).$$

TODISTUS. Väitteet (i) ja (ii) ovat ekvivalentteja erikoistapauksena Lauseesta 57. Koska mielivaltaisille (lohko)matriiseille pätee similaarimuunnos
$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & -U \\ -N & V \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & U \\ N & V \end{bmatrix},$$
väitteet (ii) ja (iii) ovat selvästi ekvivalentteja.

Viimeiset kaksi väitettä palautetaan väitteeseen (ii) transponoimalla (eli tarkastelemalla duaalista ongelmaa), jolloin oikeanpuoleiset ja vasemmanpuoleiset jaottomat faktorisoinnit vaihtuvat keskenään, sekä käyttämällä yksinkertaisia similariteettimuunnoksia matriisielementtien järjestelemisessä. $\square$

Edellisessä lemmassa ei tarvittu kaksinkertaisesti jaotonta faktorisointia $\hat{G}_{22}$:lle, mutta Joula-parametrisoinnissa sitä tarvitaan. Kaksinkertaisesti jaoton faktorisointi on nyt muotoa

$$\tag{32} \begin{cases} \hat{G}_{22} = \hat{N}_2 \hat{M}_2^{-1} = \hat{\hat{M}}_2^{-1} \hat{\hat{N}}_2, \\ \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} & -\hat{\hat{Y}} \\ -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{Y} \\ \hat{N}_2 & \hat{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Myös säätäjälle tarvitaan oikean ja vasemmanpuoleiset faktorisointia $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1} = \hat{\hat{V}}^{-1}\hat{\hat{U}}$, mutta niiden ei tarvitse olla kaksinkertaisesti jaottomia faktorisointeja.

Lause 64. *Olkoon $\hat{G}_{22}$ aito $RL^\infty(i\mathbb{R};\mathbb{C}^{p\times m})$-siirtofunktio, jolle RH^∞-funktiot $\hat{N}_2$, $\hat{M}_2$ $\hat{\hat{M}}_2$ $\hat{\hat{N}}_2$, $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{\hat{X}}$, ja $\hat{\hat{Y}}$ muodostavat kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin kuten yllä. Olkoon $\hat{K}$ aito $RL^\infty(i\mathbb{R};\mathbb{C}^{m\times p})$-siirtofunktio, ja RH^∞-funktiot $\hat{U}$, $\hat{V}$, $\hat{\hat{U}}$ $\hat{\hat{V}}$ kuten yllä.*

Tällöin seuraavat ovat ekvivalentteja:

(i) *Siirtofunktio $\hat{K}$ on stabiloiva säätäjä siirtofunktiolle G_{22},*

(ii) *on olemassa $\hat{Q} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$ siten, että molemmat*

$$\tag{33} \left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)^{-1} \text{ ja } \left(\hat{\hat{X}} - \hat{Q}\hat{\hat{N}}_2\right)^{-1}$$

ovat olemassa rationaalifunktioina, sekä

$$\hat{K} = \left(\hat{Y} - \hat{M}_2\hat{Q}\right)\left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)^{-1},$$

ja

(iii) *on olemassa $\hat{Q} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$ siten, että kaavan (33) molemmat inverssit ovat olemassa rationaalifunktioina, sekä*

$$\hat{K} = \left(\hat{\hat{X}} - \hat{Q}\hat{\hat{N}}_2\right)^{-1}\left(\hat{\hat{Y}} - \hat{Q}\hat{\hat{M}}_2\right).$$

Rationaalifunktiota $\hat{Q}$ kutsutaan säätäjän K Joula-parametriksi. Koska

$$\tag{34} \left(\hat{Y} - \hat{M}_2\hat{Q}\right)\left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)^{-1} = \left(\hat{\hat{X}} - \hat{Q}\hat{\hat{N}}_2\right)^{-1}\left(\hat{\hat{Y}} - \hat{Q}\hat{\hat{M}}_2\right),$$

ei ole tarvetta tehdä eroa “oikeanpuoleisten” ja “vasemmanpuoleisten” Joula-parametrien välillä. Lisäksi Lauseen 64 väitteet (ii) ja (iii) ovat ekvivalentteja. Yhtälö (34) todistuu kertomalla kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin yhtälö molemmilta puolilta ulkofunktiolla ja sen inverssillä

$$\begin{bmatrix} I_{m\times m} & -\hat{Q} \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} & -\hat{\hat{Y}} \\ -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{Y} \\ \hat{N}_2 & \hat{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m\times m} & \hat{Q} \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix},$$

josta saadaan suoraan

$$
\begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} - \hat{Q}\hat{\hat{N}}_2 & -\hat{\hat{Y}} + \hat{Q}\hat{\hat{M}}_2 \\ -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{Y} - \hat{M}_2\hat{Q} \\ \hat{N}_2 & \hat{N}_2 - \hat{X}\hat{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix}. \tag{35}
$$

Tämän matriisiyhtälön "ristitermi" antaa yhtälön (34), koska molemmat inverssit $\left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)^{-1}$ ja $\left(\hat{\hat{X}} - \hat{Q}\hat{\hat{N}}_2\right)^{-1}$ ovat olemassa rationaalisina funktioina[18]. Siirrytään todistamaan itse Joula-parametrisoinnin lause.

Todistus. Oleta (ii), ja olkoon $\hat{Q} \in RH^\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{m\times m})$. Määrittele

$$
\hat{U} := \hat{Y} - \hat{M}_2\hat{Q}, \quad \hat{V} := \hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}.
$$

Tällöin $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1}$, mikäli $\hat{V}^{-1}$ on olemassa rationaalifunktiona. Todistetaan että $\hat{K}$ on stabiloiva säätäjä, ja että se on annettu erään oikealta jaottoman faktorisointinsa muodossa.

Kaava (35) voidaan kirjoittaa uudelleen

$$
\begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} - \hat{Q}\hat{\hat{N}}_2 & -\hat{\hat{Y}} + \hat{Q}\hat{\hat{M}}_2 \\ -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{U} \\ \hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix}.
$$

Koska edellisen yhtälön vasemmanpuoleisin faktori on RH^∞-funktio, joten $\left[\begin{smallmatrix} \hat{M}_2 & \hat{U} \\ \hat{N}_2 & \hat{V} \end{smallmatrix}\right]^{-1} \in RH^\infty$. Korollaarin 52 perusteella $\hat{U}$ ja $\hat{V}$ ovat oikealta jaottomia, ja antavat siis säätäjäkandidaatille $\hat{K}$ oikealta jaottoman faktorisoinnin. Lemman 63 väitteestä (iii) seuraa vihdoin, että $\hat{K}$ on stabiloiva säätäjä.

Oleta (i), ja olkoon $\hat{K} = \hat{U}\hat{V}^{-1}$ eräs stabiloivan säätäjän oikealta jaoton faktorisointi. Kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin kaavasta (32) saadaan

$$
\begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} & -\hat{\hat{Y}} \\ -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{U} \\ \hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & \hat{\hat{X}}\hat{U} - \hat{\hat{Y}}\hat{V} \\ 0 & \hat{D} \end{bmatrix}, \tag{36}
$$

jossa $\hat{D} := \hat{\hat{M}}_2\hat{V} - \hat{\hat{N}}_2\hat{U} \in RH^\infty$. Ottamalla molemmilta puolilta determinantit, havaitaan että

$$
\det(\hat{D}) = \det \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} & -\hat{\hat{Y}} \\ -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{U} \\ \hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix}.
$$

[18] Tämänkin kysymyksen Francisin kirja ohittaa typerästi. Kysymys on lähinnä siitä, tarvitseeko erikseen olettaa molempien inverssien olemassaolo. Jos tarvitsee, niin silloin Joula-parametrien $\hat{Q}$ joukkona ei olekaan kaikki rationaalifunktiot, vaan niiden eräs paljon vaikeammin käsiteltävä osajoukko.

Matriisifunktioista vasemmanpuoleinen on RH^∞-ulkofunktio kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin määritelmän perusteella. Oikeanpuoleinen on taas ulkofunktio Lemman 63 perusteella, koska $\hat{K}$ on oletettu stabiloivaksi säätäjäksi. Niinpä $\det(\hat{D})$ on skalaariarvoinen RH^∞-ulkofunktio, ja seurauksena $\hat{D}^{-1} \in RH^\infty$ napoja tarkastelemalla. Voidaan siis määritellä

$$\hat{Q} := -\left(\hat{\tilde{X}}\hat{U} - \hat{\tilde{Y}}\hat{V}\right)\hat{D}^{-1} \in RH^\infty,$$

joka ilmenee hetken päästä olevan Joula-parametriksi sopiva.

Käyttämällä kaksinkertaisesti jaotonta faktorisointia (32), mutta vaihtamalla lohkomatriisien järjestystä (mahdollista, koska kyseessä on äärellisulotteiset matriisit!) saadaan

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{U} \\ \hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{Y} \\ \hat{N}_2 & \hat{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tilde{X}} & -\hat{\tilde{Y}} \\ -\hat{\tilde{N}}_2 & \hat{\tilde{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{U} \\ \hat{N}_2 & \hat{V} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{Y} \\ \hat{N}_2 & \hat{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m\times m} & -\hat{Q}\hat{D} \\ 0 & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \left(\hat{Y} - \hat{M}_2\hat{Q}\right)\hat{D} \\ \hat{N}_2 & \left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)\hat{D} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Poimimalla $\hat{U}$ ja $\hat{V}$ saadaan $\hat{K} = \left(\hat{Y} - \hat{M}_2\hat{Q}\right)\left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)^{-1}$, ja erityisesti $\left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)^{-1}$ on olemassa rationaalifunktiona. Todistus on näin lähes valmis. Tekemällä sama analyysi duaalipuolella, havaitaan, että myös inverssi $\left(\hat{\tilde{X}} - \hat{Q}\hat{\tilde{N}}_2\right)^{-1}$ on olemassa, ja väite (ii) seuraa. $\square$

6.3. Standardiongelman reduktio. Tässä luvussa redusoimme standardiongelman mallinsovitusongelmaksi.

Olkoon $\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{bmatrix}$ ja $\hat{K}$ aitoja $RL^\infty(i\mathbb{R})$ siirtofunktioita, jotka määrittelevät standardiongelman. Tehdään siirtofunktiolle G_{22} kaksinkertaisesti jaoton faktorisointi kuten edellisessä luvussa

$$\begin{cases} \hat{G}_{22} = \hat{N}_2 \hat{M}_2^{-1} = \hat{\hat{M}}_2^{-1} \hat{\hat{N}}_2, \\ \begin{bmatrix} \hat{\hat{X}} & -\hat{\hat{Y}} \\ -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}_2 & \hat{Y} \\ \hat{N}_2 & \hat{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & I_{p\times p} \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{37}$$

Määritellään siirtofunktiot $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3$ seuraavasti:

$$\begin{cases} \hat{T}_1 := \hat{G}_{11} + \hat{G}_{12} \hat{M}_2 \hat{\hat{Y}} \hat{G}_{21} \\ \hat{T}_2 := \hat{G}_{12} \hat{M}_2 \\ \hat{T}_3 := \hat{\hat{M}}_2 \hat{G}_{21}. \end{cases} \tag{38}$$

PROPOSITIO 65. *Olkoon $\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{bmatrix}$ stabiloituva, ja oletetaan että $\hat{G}_{22}$ on täysin aito. Tällöin yhtälössä (38) määritellyt siirtofunktiot $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3$ kuuluvat avaruuteen RH^∞.*

TODISTUS. Kotitehtäväksi on annettu aikaisemmin standardiongelman lohkokaavion siirtofunktion laskeminen, jos $\hat{G}_{22}$ on täysin aito ja säätäjänä on siirtofunktio $\hat{K}$. Paljastetaan nyt suoran laskun tulos, joka on

$$\hat{H}_{G,K} =$$
$$\begin{bmatrix} \hat{G}_{11} + \hat{G}_{12}\left(I - \hat{K}\hat{G}_{22}\right)^{-1}\hat{K}\hat{G}_{21} & \hat{G}_{12}\left(I - \hat{K}\hat{G}_{22}\right)^{-1} & \hat{G}_{12}\left(I - \hat{K}\hat{G}_{22}\right)^{-1}\hat{K} \\ \hat{K}\left(I - \hat{G}_{22}\hat{K}\right)^{-1}\hat{G}_{21} & \left(I - \hat{K}\hat{G}_{22}\right)^{-1} & \left(I - \hat{K}\hat{G}_{22}\right)^{-1}\hat{K} \\ \left(I - \hat{G}_{22}\hat{K}\right)^{-1}\hat{G}_{21} & \hat{G}_{22}\left(I - \hat{K}\hat{G}_{22}\right)^{-1} & \left(I - \hat{G}_{22}\hat{K}\right)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Koska $\hat{G}$ on oletettu stabiloituvaksi, voidaan löytää jokin $\hat{K}$ siten että jokainen siirtofunktion $\hat{H}_{G,K}$ lohko on funktio avaruudessa RH^∞. Lauseen 62 perusteella riittää hakea jokin sellainen siirtofunktio $\hat{K}$ joka stabiloi elementin $\hat{G}_{22}$ määrittelemän yksinkertaistetun stabilointitehtävän.

Lauseen 64 Joula-parametrisoinnin avulla saadaan kaikki tällaiset $\hat{K}$, ja valitsemme täsmälleen sen jonka Joula-parametri $Q = 0$ [19]. Tällöin

[19]Tässä fuskaamme hieman, sillä Joula-parametri voidaan valita nollaksi ainoastaan jos kaksinkertaisesti jaoton faktorisointimme (37) on sellainen, jossa $\hat{X}^{-1}$ ja $\hat{\hat{X}}^{-1}$ ovat olemassa rationaalisina funktioina. Olettakaamme näin.

stabiloivaksi säätäjäksi saadaan

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{X}^{-1} = \hat{\hat{X}}^{-1}\hat{\hat{Y}},$$

joka on tässä annettu oikean ja jaottoman faktorisoinnin muodossa Lauseen 64 todistuksen perusteella. Saadaan funktion $\hat{G}_{22}$ kaksinkertaisesti jaottoman faktorisoinnin perusteella

$$I - \hat{K}\hat{G}_{22} = \hat{\hat{X}}^{-1}\left(\hat{\hat{X}}\hat{M}_2 - \hat{\hat{Y}}\hat{N}_2\right)\hat{M}_2^{-1} = \hat{\hat{X}}^{-1}\hat{M}_2^{-1}$$

ja siten $\left(I - \hat{K}\hat{G}_{22}\right)^{-1} = \hat{M}_2\hat{\hat{X}}$ sekä $\left(I - \hat{K}\hat{G}_{22}\right)^{-1}\hat{K} = \hat{M}_2\hat{\hat{X}}\hat{\hat{X}}^{-1}\hat{\hat{Y}} = \hat{M}_2\hat{\hat{Y}}$. Mutta nyt huomataan että

$$\hat{T}_1 := \hat{G}_{11} + \hat{G}_{12}\left(I - \hat{K}\hat{G}_{22}\right)^{-1}\hat{K}\hat{G}_{21},$$

joka on avaruudessa RH^∞, koska se on funktion $\hat{H}_{G,K}$ vasen ylänurkka.

Tarkastellaan seuraavaksi funktiota $\hat{T}_2 := \hat{G}_{12}\hat{M}_2$. Saadaan

$$\hat{T}_2\hat{\hat{X}} = \hat{G}_{12} \cdot \hat{M}_2\hat{\hat{X}} = \hat{G}_{12}\left(I - \hat{K}\hat{G}_{22}\right)^{-1},$$

joka on funktion $\hat{H}_{G,K}$ ylärivillä keskellä. Niinpä $\hat{T}_2\hat{\hat{X}} \in RH^\infty$. Samoin

$$\hat{T}_2\hat{\hat{Y}} = \hat{G}_{12} \cdot \hat{M}_2\hat{\hat{X}} \cdot \hat{\hat{X}}^{-1}\hat{\hat{Y}} = \hat{G}_{12}\left(I - \hat{K}\hat{G}_{22}\right)^{-1}\hat{K},$$

joka on funktion $\hat{H}_{G,K}$ oikea ylänurkka. Niin muodoin $\hat{T}_2\hat{\hat{Y}} \in RH^\infty$. Käyttämällä kaksinkertaisesti jaotonta faktorisointia, huomataan

$$\hat{T}_2 = \begin{bmatrix} \hat{T}_2\hat{\hat{X}} & -\hat{T}_2\hat{\hat{Y}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{M}_2 \\ \hat{N}_2 \end{bmatrix} \in RH^\infty.$$

Jäljellä on vielä funktio $\hat{T}_3 := \hat{\hat{M}}_2\hat{G}_{21}$. Aivan samalla tavalla kuin aikaisemmin saadaan $\left(I - \hat{G}_{22}\hat{K}\right)^{-1} = \hat{X}\hat{\hat{M}}_2$ ja edelleen $\hat{K}\left(I - \hat{G}_{22}\hat{K}\right)^{-1} = \hat{Y}\hat{X}^{-1}\hat{X}\hat{\hat{M}}_2 = \hat{Y}\hat{\hat{M}}_2$. Mutta nyt

$$\hat{X}\hat{T}_3 = \hat{X}\hat{\hat{M}}_2 \cdot \hat{G}_{21} = \left(I - \hat{G}_{22}\hat{K}\right)^{-1}\hat{G}_{21},$$

joka on funktion $\hat{H}_{G,K}$ vasen alanurkka, ja siten avaruudessa RH^∞. Seuraavaksi

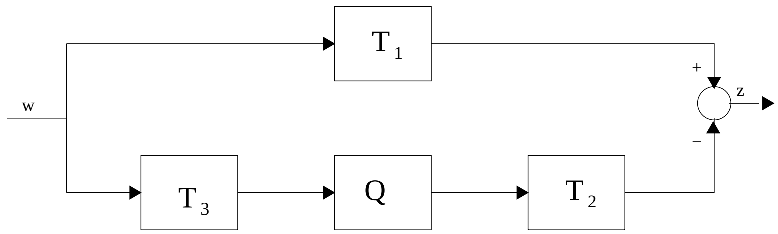
$$\hat{Y}\hat{T}_3 = \hat{Y}\hat{X}^{-1} \cdot \hat{X}\hat{\hat{M}}_2 \cdot \hat{G}_{21} = \hat{K}\left(I - \hat{G}_{22}\hat{K}\right)^{-1}\hat{G}_{21},$$

joka on sijaitsee vasemmanpuoleisen pystyrivin keskellä funktiossa $\hat{H}_{G,K}$. Kaksinkertaisesti jaoton faktorisointi antaa

$$\hat{T}_3 = \begin{bmatrix} -\hat{\hat{N}}_2 & \hat{\hat{M}}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{Y}T_3 \\ \hat{X}_2T_3 \end{bmatrix} \in RH^\infty.$$

Propositio on nyt todistettu. □

Edellisen proposition nojalla siirtofunktiot $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3 \in RH^\infty$ määrittelevät siis erään mallinsovitusongelman jossa $\hat{Q}$ on parametri joka tulisi valita



Kuva 8. Mallinsovitusongelma

niin, että virheen normi $||\hat{T}_1 - \hat{T}_2\hat{Q}\hat{T}_3||_\infty$ joko minimoituu tai menee alle vaaditun tason $\gamma > 0$. Osoittautuu, että siirtofunktio $\hat{Q}$ kannattaa tulkita erään stabilointitehtävän Joula-parametriksi. Niinpä määritellään Joula-parametrin funktio

$$\hat{K}_Q := \left(\hat{Y} - \hat{M}_2\hat{Q}\right)\left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)^{-1}$$

kaikilla niillä rationaalisilla funktioilla $\hat{Q}$ joille sekä $\left(\hat{X} - \hat{N}_2\hat{Q}\right)^{-1}$ että $\left(\hat{\hat{X}} - \hat{Q}\hat{\hat{N}}_2\right)^{-1}$ ovat olemassa rationaalifunktioina.

Lemma 66. *Olkoon* $\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{bmatrix}$ *stabiloituva. Olkoon siirtofunktiot* $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3$, $\hat{Q}, \hat{K}_Q$ *kuten yllä. Tällöin*

$$\hat{T}_1 - \hat{T}_2\hat{Q}\hat{T}_3 = \hat{G}_{11} + \hat{G}_{12}\left(I - \hat{K}_Q\hat{G}_{22}\right)\hat{K}_Q\hat{G}_{21}.$$

Todistus on aivan helppo, jätetään harjoitustehtäväksi. Se löytyy kyllä Francisin kirjasta sivulta 43, jos laiskottaa.

Korollaari 67. *Standardiongelma voidaan redusoida (tiettyjen rajoittavien teknillisten oletusten vallitessa) mallinsovitusongelmaksi. Sama pätee myös standardiongelman suboptimaaliselle muodolle, joka redusoituu suboptimaaliseksi mallinsovitusongelmaksi.*

Kuva 9. Kiraffi (*Giraffa camelopardalis*)