

Yo-koe, pitkä oppimäärä, 28.9.2011

Maple/Heikki Apiola 24.10.2011

Tehtävät - ne, joissa ohjelmasta on edes jotain hyötyä - ratkaistuna ja dokumentoituna Maple-ohjelman laskenta-arkkia hyödyntäen ja myös sen erilaisia uusiakin ominaisuuksia kokeillen.

▼ 1

a) Ratkaise yhtälö $3 \cdot x^2 = -x$

> `solve(3·x2 = -x, x)`

$$0, -\frac{1}{3}$$

(1.1)

b) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa = 5, toinen kateetti = 2. Laske toinen.

> `√(52 - 22)`

$$\sqrt{21}$$

(1.2)

Vastaus: `√21`

c) Ratkaise yhtälö $\frac{4 \cdot x - 1}{5} = \frac{x + 1}{2} + \frac{3 - x}{4}$

$$\frac{4}{5}x - \frac{1}{5} = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

(1.3)

`solve((1.3))`

$$\frac{29}{11}$$

(1.4)

Vaiheittain edeten:

`vasen := lhs((1.3))`

$$\frac{4}{5}x - \frac{1}{5}$$

(1.5)

`oikea := rhs((1.3))`

$$\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

(1.6)

`vasen := 20·vasen`

$$16x - 4$$

(1.7)

`oikea := 20·oikea`

$$5x + 25$$

(1.8)

`vasen = oikea`

$$16x - 4 = 5x + 25$$

(1.9)

└ Määritellään pikkuinen oma yhtälömuokkausfunktio:

$$\text{lisaapuolittain} := (\text{yhtalo}, \text{termi}) \rightarrow \text{lhs}(\text{yhtalo} + \text{termi}) = \text{rhs}(\text{yhtalo}) + \text{termi}$$

$$(\text{yhtalo}, \text{termi}) \rightarrow \text{lhs}(\text{yhtalo} + \text{termi}) = \text{rhs}(\text{yhtalo}) + \text{termi} \quad (1.10)$$

$$\text{lisaapuolittain}((1.9), -5 \cdot x)$$

$$11x - 4 = 25 \quad (1.11)$$

$$\text{lisaapuolittain}((1.11), 4)$$

$$11x = 29 \quad (1.12)$$

Ei viitsitä enää määritellä funktiota "jaapuolittain", vaan annetaan **solve**n tehdä se, jonka jokainen näkee jo päältä.

$$\text{solve}((1.12))$$

$$\frac{29}{11} \quad (1.13)$$

Huom: **student-pakkauksessa** on vaiheittaiseen yhtälön muokkaukseen soveliaita funktioita. Jos käyttäjällä on jonkinverran Maple-taitoja, on usein nopeampaa määritellä juuri kyseiseen tilanteeseen sovelias pikku apufunktio lennossa itse.

?student

2

a.) **Sievennä lauseke** $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$

välivaiheet esittäen.

$$> \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \quad (2.1)$$

$$> \text{simplify}((2.1))$$

$$1 \quad (2.2)$$

Välivaiheita ei tässä saatu näkyviin. Tähän tapaan voidaan edetä ohjaamalla Maplea kädestä pitäen:

Lavennetaan "liittoluvulla", saadaan jälkimmäisen termin nimittäjä:

$$> (2 + \sqrt{2}) \cdot (2 - \sqrt{2})$$

$$(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) \quad (2.3)$$

$$> \text{simplify}((2.3))$$

$$2 \quad (2.4)$$

$$> \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{(2 - \sqrt{2})}{2}$$

$$1 \quad (2.5)$$

b) **Laske suoran** $y = 2 \cdot x$ **ja ympyrän** $x^2 + y^2 = 1$ **leikkauspisteet.**

$$> \text{yhtaloryhma} := \{y = 2 \cdot x, x^2 + y^2 = 1\}$$

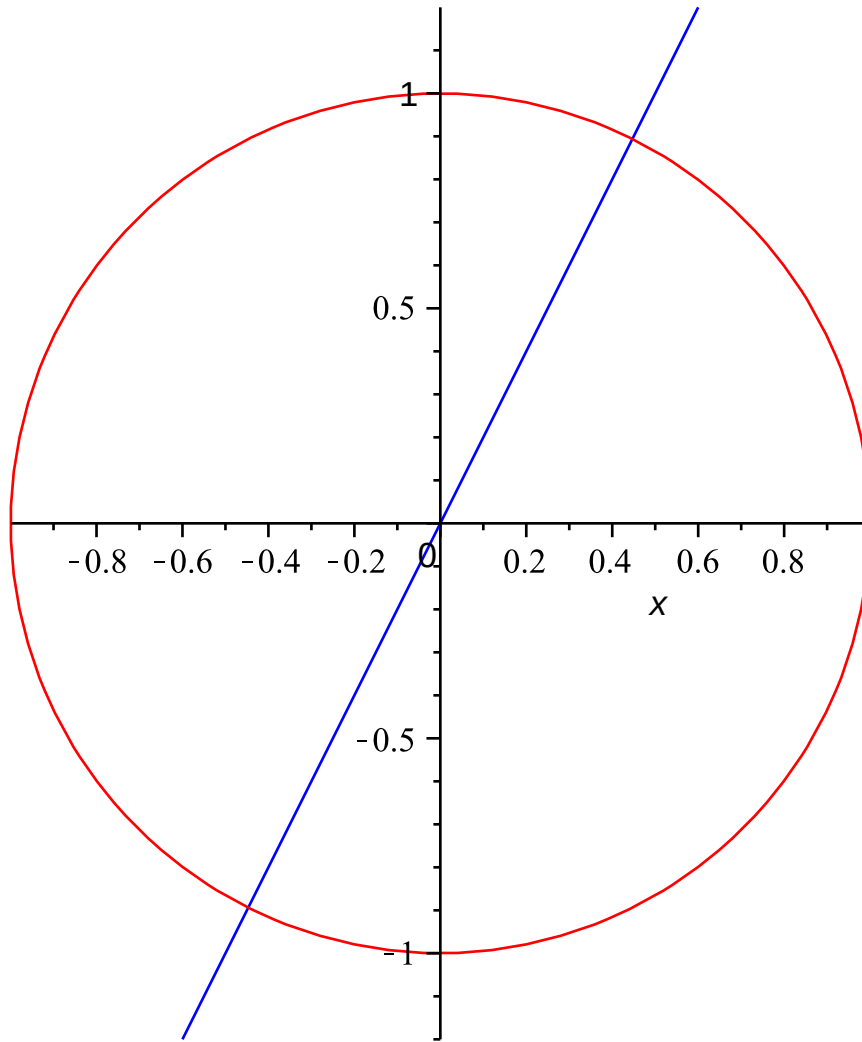
$$\text{yhtaloryhma} := \{y = 2x, x^2 + y^2 = 1\} \quad (2.6)$$

$$> \text{solve}(\text{yhtaloryhma}, \{x, y\}, \text{explicit} = \text{true})$$

$$\left\{x = \frac{1}{5} \sqrt{5}, y = \frac{2}{5} \sqrt{5}\right\}, \left\{x = -\frac{1}{5} \sqrt{5}, y = -\frac{2}{5} \sqrt{5}\right\} \quad (2.7)$$

```
> with(plots) :
```

```
> display(plot(2·x, x=-0.6..0.6, color=blue), implicitplot(x2+y2=1, x=-1..1, y=-1..1),  
          scaling=constrained);
```



c.) $f(x) = 2^{-x}$, Laske $\frac{d}{dx} f(x)$ pistessä $x = 1$

```
> f := x → 2-x
```

$$f := x \rightarrow 2^{-x}$$

(2.8)

```
> df := D(f)
```

$$df := x \rightarrow -2^{-x} \ln(2)$$

(2.9)

```
> df(1)
```

$$-\frac{1}{2} \ln(2)$$

(2.10)

```
>
```

3.

a) Ratkaise yhtälö

$$\ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln(4) + \ln(2)$$

$$\ln(x+1) - \ln(x-1) = 3 \ln(2) \quad (3.1)$$

$x = \text{solve}((3.1))$

$$x = \frac{9}{7} \quad (3.2)$$

Periaatteessa pitäisi vielä tarkistaa, että saatu x ei vie $\ln$ -funktion määrittelyalueen ulkopuolelle, mikä on vain sitä, että $x - 1 > 0$. Tarkistetaan yhtälön toteutuminen vielä Maplella. (Periaatteessa riittäisi joko tämä tarkistus tai edellä oleva toteamus. Mutta tarkistus on aina hyvä ja samalla opitaan Maple-tekniikkaa.)

$\text{subs}((3.2), (3.1));$

$$\ln\left(\frac{16}{7}\right) - \ln\left(\frac{2}{7}\right) = 3 \ln(2) \quad (3.3)$$

$\text{simplify}((3.3));$

$$3 \ln(2) = 3 \ln(2) \quad (3.4)$$

Siispä toteutuu.

Välivaiheita mukaan

Kokeillaan,saadaanko vasen puoli sievennetyksi käsinlaskuun sopivaan muotoon

$\text{simplify}(\text{lhs}((3.1)))$

$$\ln(x+1) - \ln(x-1) \quad (3.1.1)$$

$\text{combine}((3.1.1), \ln, \text{symbolic})$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad (3.1.2)$$

Löytyi helpin avulla lähtien **?simplify,ln**.

Lisämääre *symbolic*

siirtää vastuun voimassaoloalueesta käyttäjälle

Jos et keksi sopivaa sievennyskommentoa, niin äkkiähän tuon voi kirjoittaa itse haluttuun muotoon:

[>]

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(4 \cdot 2)$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 3 \ln(2) \quad (3.1.3)$$

Maple ei suostu olemaan sieventämättä oikeaa puolta, pakotetaan se ihan väkisin:

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(\text{kahdeksan})$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(\text{kahdeksan}) \quad (3.1.4)$$

Sovelletaan eksponenttifunktiota puolittain:

$$\exp(\text{lhs}((3.1.4))) = \exp(\text{rhs}((3.1.4)))$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \text{kahdeksan} \quad (3.1.5)$$

$\text{kahdeksan} := 8$

Muuttujalle kahdeksan annetaan arvo 8

(3.1.5)

$$\frac{x+1}{x-1} = 8 \quad (3.1.7)$$

$\text{solve}((3.1.7), x)$

$$\frac{9}{7} \quad (3.1.8)$$

Siinäpä se.

b) Ratkaise epäyhtälö $\frac{(2 \cdot x + 1)}{x - 1} \geq 3$

$$> \frac{(2 \cdot x + 1)}{x - 1} \geq 3$$

$$3 \leq \frac{2x + 1}{x - 1} \quad (3.5)$$

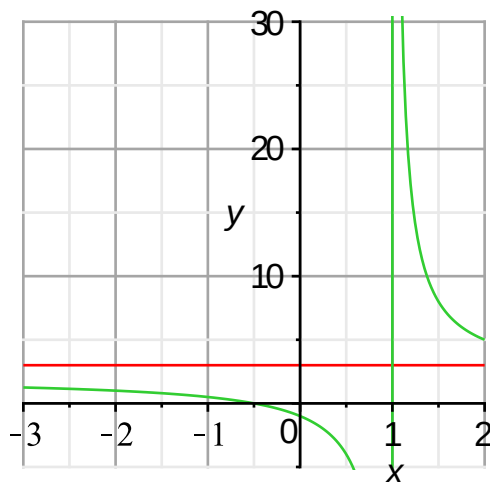
$> \text{solve}(\{ (3.5) \})$

$$\{x \leq 4, 1 < x\} \quad (3.6)$$

Vastaus: $1 < x \leq 4$. (Tätä voisi selvittää tarkemmin, mutta riittääköön tällä kertaa.) Katsotaan vielä kuvasta:

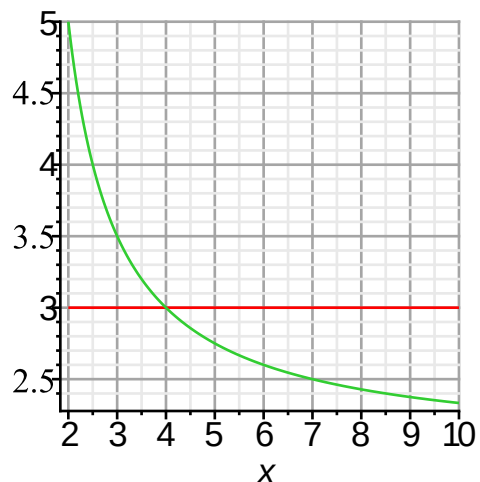
$>$

$> \text{plot}([3, (2 \cdot x + 1)/(x - 1)], x = -3.2, y = -5..30);$



$>$

$> \text{plot}([3, (2 \cdot x + 1)/(x - 1)], x = 2..10);$



$>$

Kuvat vahvistavat vastauksen.

c) Pisteen (3,-2) etäisyys suorasta $4 \cdot x - 3 \cdot y = 2$

Ratk: Kaava: $d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, missä suoran yhtälö: $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$.

No, eikun sijoitetaan:

$$> d := \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d := \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3.7)$$

$$> a := 4 : \\ b := -3 : \\ c := -2 :$$

$$> x_0 := 3 : \\ y_0 := -2 :$$

$$> d;$$

$$\frac{16}{25} \sqrt{25} \quad (3.8)$$

$$> \text{simplify}((3.8))$$

$$\frac{16}{5} \quad (3.9)$$

Huomaa, että symbolilaskentaohjelmassa voidaan kirjoittaa ensin yleinen kaava vapain muuttujiin ja sitten sijoittaa muuttujille arvot. (Numeerisessa ohjelmassa tämä ei käy.)

4.

a) Näytä, että molemmat funktiot

$$F_1(x) = \frac{1}{1-x} \text{ ja } F_2(x) = \frac{x}{1-x}$$

ovat funktion

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ integraalifunktioita, kun } x > 1$$

b) Sievennä erotus $F_1(x) - F_2(x)$.

c) Laske funktion $f(x)$ kuvaajan ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-ala, kun $2 \leq x \leq 5$.

Ratkaisut:

a)

$$F1 := \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} \quad (4.1)$$

$$\text{diff}(F1, x)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \quad (4.2)$$

$$F2 := \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{x}{1-x} \quad (4.3)$$

$$\text{diff}(F2, x)$$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} \quad (4.4)$$

simplify((4.4))

$$\frac{1}{(-1+x)^2}$$

(4.5)

Vaihtoehto a): lle ja b):

Kohdassa a) riittäisi derivoida F1 ja todeta, että F1-F2 = vakio, mistä seuraa, että derivaatat samat (derivaatan additiivisuus ja "vakion derivaatta =0"). Siis näin:

> F1 - F2;

$$\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x}$$

(4.6)

> *simplify*((4.6))

$$1$$

(4.7)

c)

> $f := \frac{1}{(1-x)^2}$

$$f := \frac{1}{(1-x)^2}$$

(4.8)

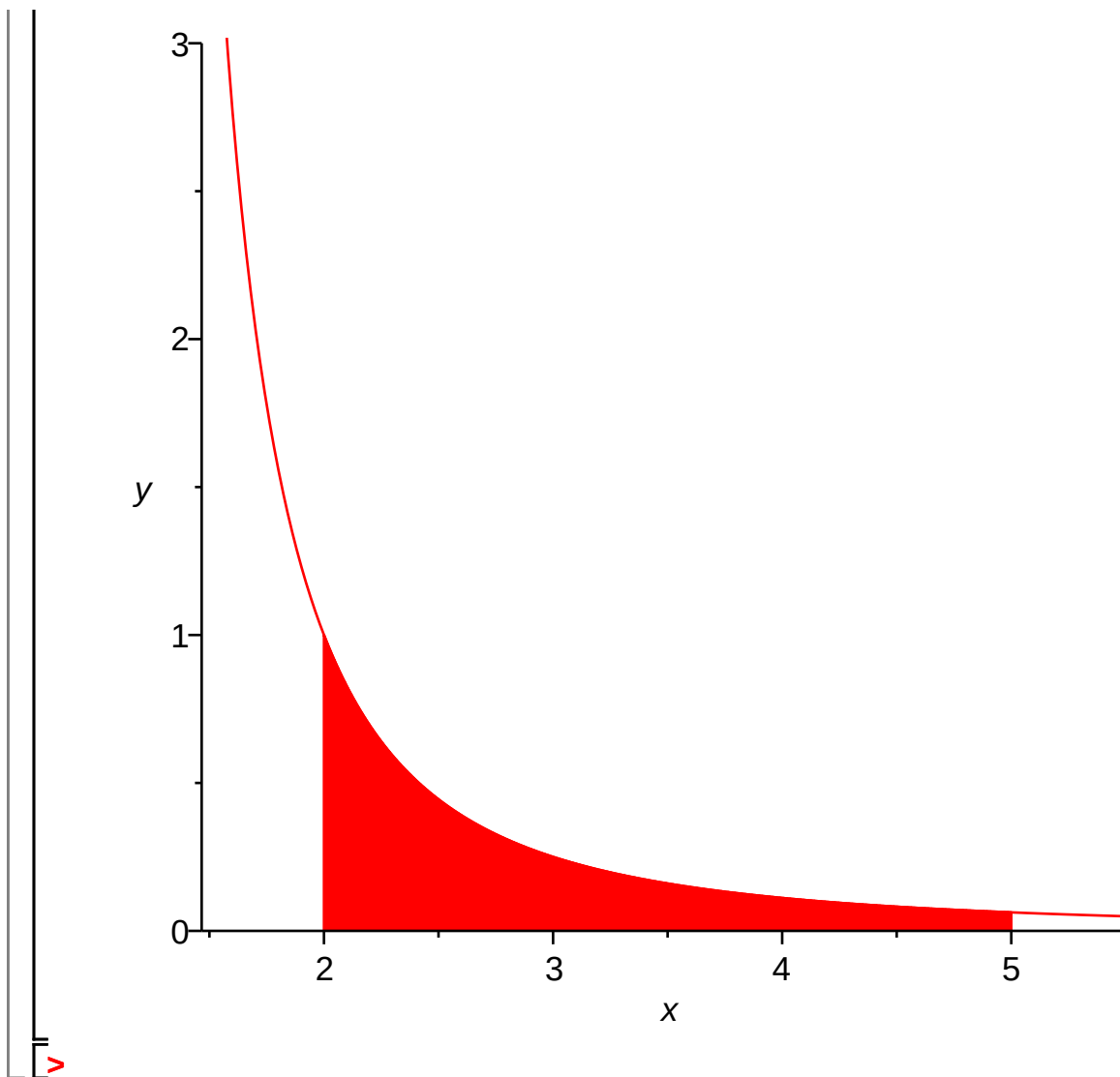
> ala := *Int*(f, x = 2 .. 5) = *int*(f, x = 2 .. 5)

$$ala := \int_2^5 \frac{1}{(1-x)^2} dx = \frac{3}{4}$$

(4.9)

> *with*(plots) :

> *display*(*plot*(f, x = 1.5 .. 5.5, y = 0 .. 3), *plot*(f, x = 2 .. 5, filled = true))



5.

Laske vektorien $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ja $\vec{B} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ välinen kulma.

```
> restart
```

```
> A := [2, 1, -2]
```

```
A := [2, 1, -2]
```

(5.1)

```
> B := [3, -2, -1]
```

```
B := [3, -2, -1]
```

(5.2)

Määritellään omat funktiot pistetulo ja pituus. Tällöin ei tarvitse käyttää valmiita "mustia laatikoita"

```
> pistetulo := (u, v) → u[1]·v[1] + u[2]·v[2] + u[3]·v[3]
```

```
pistetulo := (u, v) → u1 v1 + u2 v2 + u3 v3
```

(5.3)

```
> pituus := v → sqrt(v[1]2 + v[2]2 + v[3]2)
```

(5.4)

$$pituus := v \rightarrow \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} > \cos(\alpha) = \frac{pistetulo(A, B)}{pituus(A) \cdot pituus(B)} \\ & \cos(\alpha) = \frac{1}{7} \sqrt{14} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} > \alpha := \arccos\left(\frac{pistetulo(A, B)}{pituus(A) \cdot pituus(B)}\right) \\ & \alpha := \arccos\left(\frac{1}{7} \sqrt{14}\right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} > kulma_{asteissa} := evalf\left(\frac{180 \cdot \alpha}{\pi}, 4\right) \\ & kulma_{asteissa} := 57.69 \end{aligned} \quad (5.7)$$

6.

a) Laske $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$$F := \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} & simplify(F) \\ & x + 2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} & subs(x = 2, (6.2)) \\ & 4 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Yllä laskettiin ilman mustia laatikoita, paitsi *simplify*. Sievennyskin oltaisiin voitu avata näin:

$$\begin{aligned} > factor(x^2 - 4) \\ & (x - 2) (x + 2) \end{aligned} \quad (6.4)$$

> ?limit

>

>

Maplen musta laatikko ratkaisee suoraan:

$$\begin{aligned} > limit(F, x = 2) \\ & 4 \end{aligned} \quad (6.5)$$

>

b) Ratkaise epäyhtälö

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < 0.01;$$

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < 0.01 \quad (6.6)$$

Tällä kertaa ensin musta laatikko:

`solve((6.6), x)`

`RealRange(Open(2.), Open(2.010000000)), RealRange(Open(1.990000000), Open(2.))` (6.7)

Tarkoittaa siis avoimia välejä: $2 < x < 2.01$ tai $1.99 < x < 2$. Ts. kyseessä on "pisteessä 2 punkteerattu" väli $1.99 < x < 2.01$, josta piste 2 puuttuu.

(Tätä Maplen suoritusta voisi vaikka vähän ihastella!)

Avataanpa tuota laatikkoa:

$$\left[\begin{array}{l} > \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \end{array} \right. \quad \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \quad (6.8)$$

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \quad \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \quad (6.9)$$

`simplify`

$$x - 2 \quad (6.10)$$

Siis $|x - 2| < 0.01$ eli x :n etäisyys 2:sta pienempi kuin 0.01, joten $1.99 < x < 2.01$, $x \neq 2$.

(Hiukan makuasia, miten pitäisi suhtautua "punkteeraamattomuuteen", kun tekijän $(x - 2)$ supistaminen on kovin ilmeistä, tai sanottaisko, että tekijän mukanaolo on hiukan keinotekoisia.)

7.

`[> restart :`

Poiselleux: Putkessa virtaavan veden virtausnopeus verrannollinen halkaisijan 4:nteen potenssiin. Kuinka monta % halkaisijaa suurennettava, jotta virtausnopeus kaksinkertaistuu?

$$v = k \cdot d^4 \quad v = k d^4 \quad (7.1)$$

$$2 \cdot v = k \cdot x^4 \quad 2 v = k x^4 \quad (7.2)$$

Jaetaan puolittain:

$$2 = \left(\frac{x}{d} \right)^4$$

$$2 = \frac{x^4}{d^4} \quad (7.3)$$

$$\text{suhde} := \sqrt[4]{2}$$

$$2^{1/4} \quad (7.4)$$

$$\text{kavupros} := (\text{suhde} - 1) \cdot 100$$

$$100 \cdot 2^{1/4} - 100 \quad (7.5)$$

$$\left[\text{> evalf}((7.5), 5) \right]$$

$$18.92 \quad (7.6)$$

8.

Todaritehtävä, laskentapuolessa vain murtolukujen kerto- ja yhteenlaskua, ei Maple-kiinnostava.

9.

[a] Näytä, että funktiolla $f(x) = x^2 - 2 \cdot x$ on käänteisfunktio, kun $x \geq 1$.

Ratkaisu:

restart :

$$f := x \rightarrow x^2 - 2 \cdot x$$

$$x \rightarrow x^2 - 2 \cdot x \quad (9.1)$$

$$df := \text{diff}(f(x), x)$$

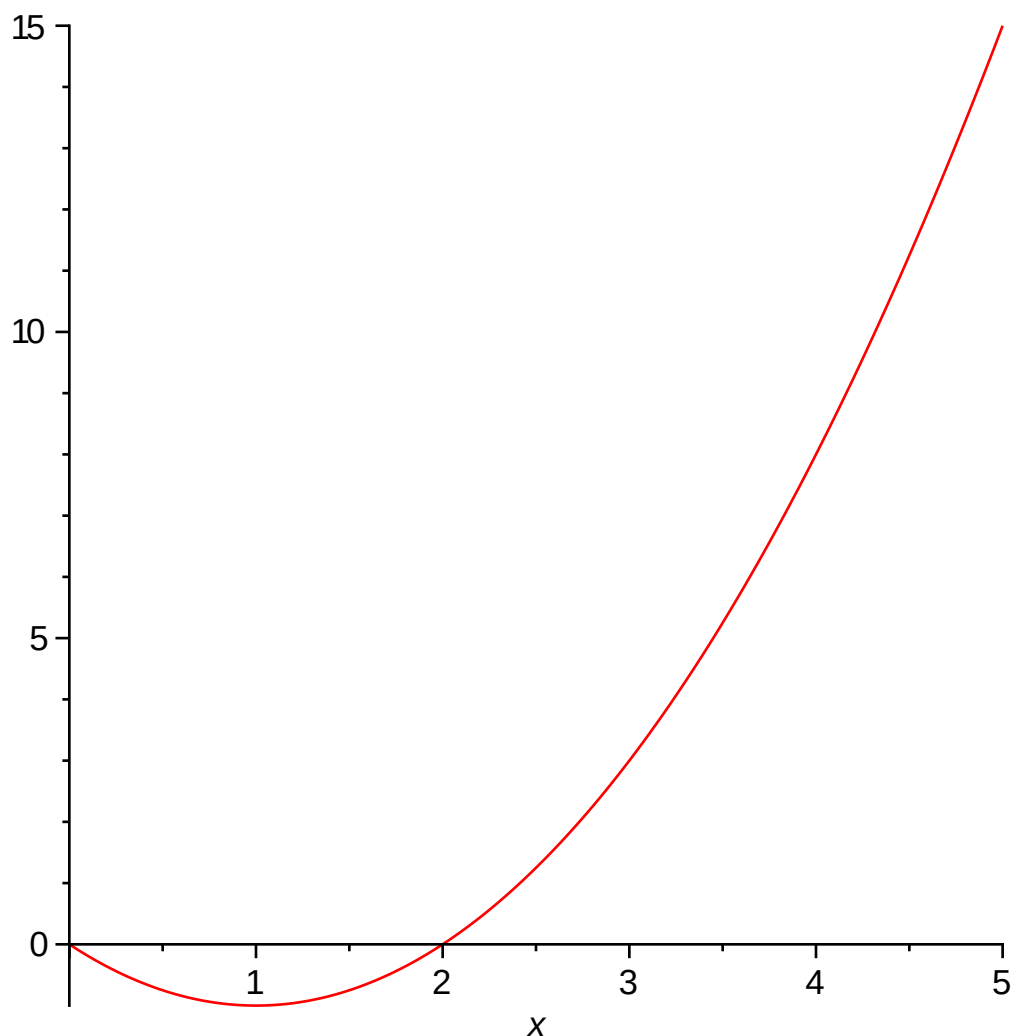
$$2 \cdot x - 2 \quad (9.2)$$

Koska $\frac{d}{dx} f(x) > 0$, kun $x > 1$, ja $\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=1} = 0$, niin

f on kasvava, kun $x \geq 1$. Koska se on myös jatkuva, sillä on käänteisfunktio tuossa alueessa.

b) Määritä käänteisfunktion lauseke.

$$\text{plot}(f(x), x = 0 .. 5)$$



$\text{solve}(f(x)=y, x)$

$$1 + \sqrt{1+y}, 1 - \sqrt{1+y}$$

(9.3)

$f(1)$

Funktio saa kaikki arvot $y \geq -1$,
joten miinus-merkkinen haara ei tule kyseeseen. Siten **käänteisfunktio on**

`> g := y → 1 + sqrt(1 + y)`

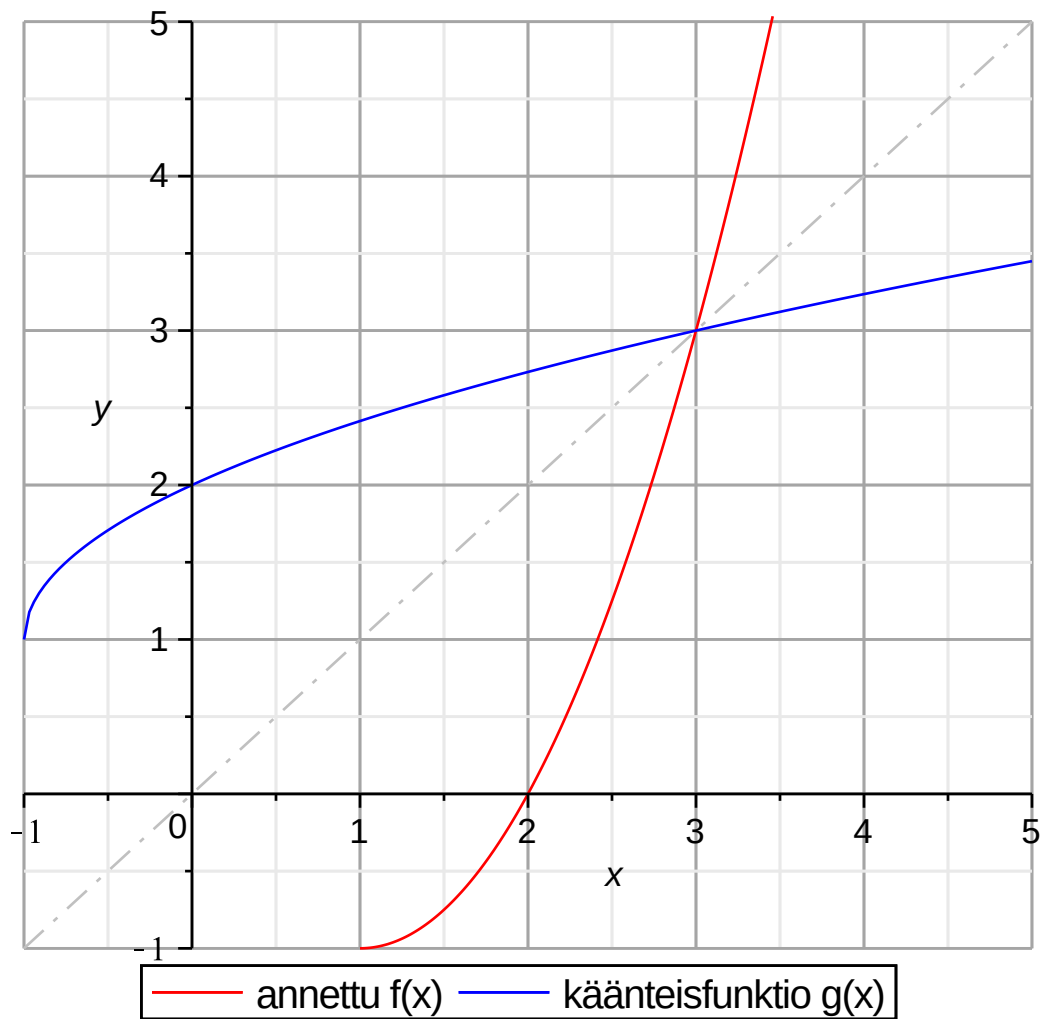
$$g := y \rightarrow 1 + \sqrt{1+y}$$

(9.4)

c) Piirrä kuvaajat samaan koordinaatistoon.

`> with(plots) :`

`> display(plot(f(x), x = 1 .. 4, y = -1 .. 5, color = red, legend = ["annettu f(x)"]), plot(g(x), x =
-1 .. 5, color = blue, legend = ["käänteisfunktio g(x)"]), plot(x, x = -1 .. 5, linestyle
= dashdot, color = grey), gridlines = true)`



10.

Määritä funktion

$f(x) = 3 \cdot \cos(x)^2 - \sin(x)^2 - 2$: nollakohdat ja suurin ja pienin arvo.

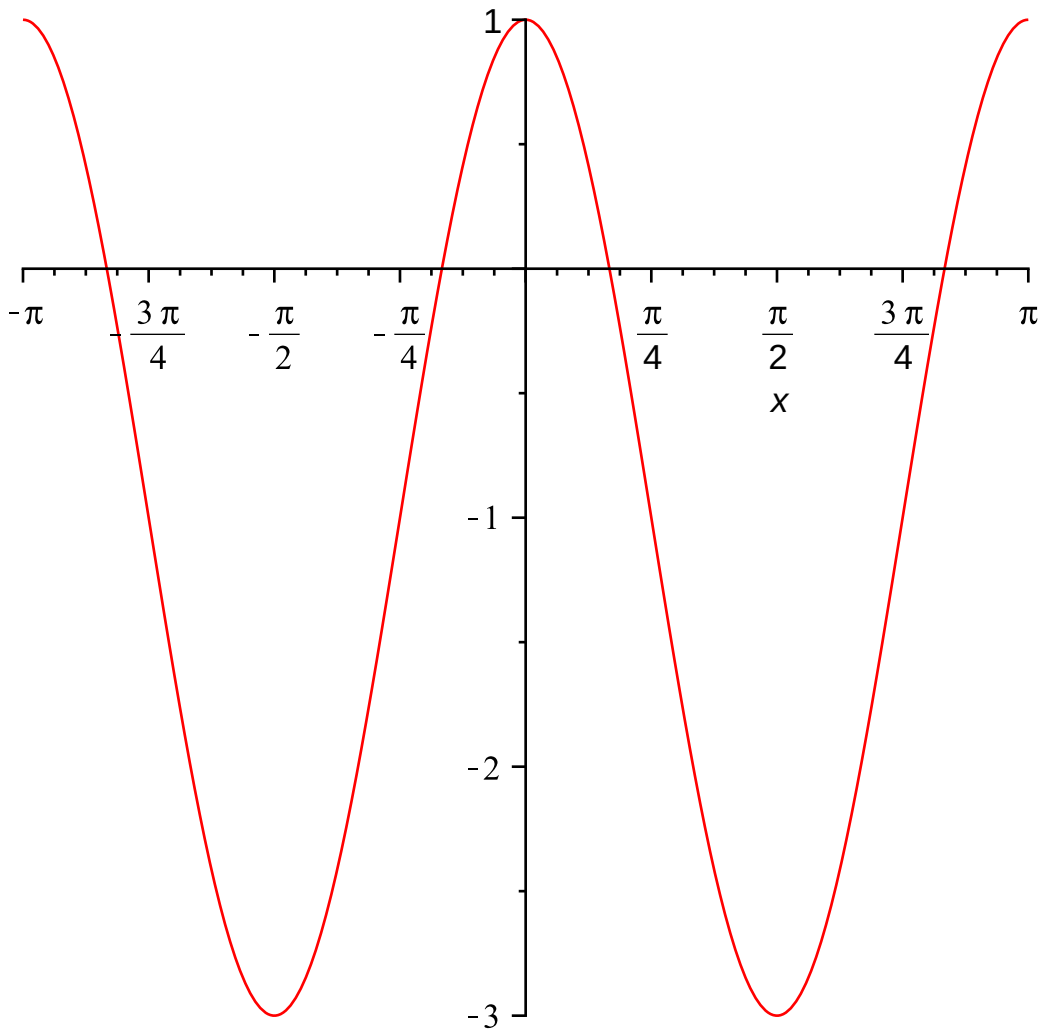
[Ratkaisu:

$f := 3 \cdot \cos(x)^2 - \sin(x)^2 - 2$ # Käsitellään lausekkeena.

$3 \cos(x)^2 - \sin(x)^2 - 2$

$\text{plot}(f, x = -\pi.. \pi)$

(10.1)



$$f := \text{subs}(\sin(x)^2 = 1 - \cos(x)^2, f)$$

$$4 \cos(x)^2 - 3$$

(10.2)

Nähdään, että nollakohdat ovat x :llä, joilla $\cos(x) = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$

Oliko se nyt 30 vai 60 astetta? Annetaan Maplen laskea!

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{3}, \frac{1}{2}$$

(10.3)

No niin, edellinen siis $\frac{\pi}{6}$ eli 30 astetta.

Siis **nollakohdat:** $\pm \frac{\pi}{6} + 2 \cdot n \cdot \pi$ ja $\pm \frac{5 \cdot \pi}{6} + 2 \cdot n \cdot \pi$

$\cos^2$: n suurin arvo = 1 ja pienin = 0. Siten f : **n suurin arvo = $4 - 3 = 1$ ja pienin = -3 .**

Maple-lasku derivoiden, ilman trig. sievennyksiä:

$$f := 3 \cdot \cos(x)^2 - \sin(x)^2 - 2$$

$$3 \cos(x)^2 - \sin(x)^2 - 2 \quad (10.4)$$

$\text{solve}(f=0, x)$

$$\frac{1}{6} \pi, \frac{5}{6} \pi \quad (10.5)$$

Maple ei lisännyt $2 \cdot \pi$:n monikertoja, ja siltä jäi myös mainitsematta/huomaamatta $\pm$ yllä.

$df := \text{diff}(f, x)$

$$-8 \cos(x) \sin(x) \quad (10.6)$$

$\text{solve}(df=0, x)$

$$\frac{1}{2} \pi, 0 \quad (10.7)$$

$\text{maksimi} := \text{subs}\left(x = \frac{\text{Pi}}{2}, f\right)$

$$3 \cos\left(\frac{1}{2} \pi\right)^2 - \sin\left(\frac{1}{2} \pi\right)^2 - 2 \quad (10.8)$$

simplify trig

$$-3 \quad (10.9)$$

$\text{minimi} := \text{subs}(x=0, f)$

$$3 \cos(0)^2 - \sin(0)^2 - 2 \quad (10.10)$$

$\text{simplify}(\text{minimi}, \text{trig})$

$$1 \quad (10.11)$$

Ei tämäkään tapa huono ole käsinkään laskettaessa, paitsi ehkä tuo ekan yhtälön ratkaiseminen.

11.

$$a[n] = \frac{n}{2 \cdot n + 1}$$

$$a_n = \frac{n}{2n + 1} \quad (11.1)$$

a) Näytä: $0 < a_n < \frac{1}{2}$, kun $n = 1, 2, 3, \dots$

b) Näytä: $a_{n+1} < a_n$, kun $n=1,2,3,\dots$

c) Määritä $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Ratk:

a) $2 \cdot n + 1 < 2 \cdot n$, joten nimittäjä enemmän kuin 2 kertaa osoittaja.

b)

$$a := n \rightarrow \frac{n}{2 \cdot n + 1}$$

$$n \rightarrow \frac{n}{2n+1} \quad (11.2)$$

$$a(n+1) - a(n)$$

$$\frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} \quad (11.3)$$

simplify((11.3))

$$\frac{1}{(2n+3)(2n+1)} \quad (11.4)$$

Peräkkäisten termien erotus on siis positiivinen.

c)

$$a_n := \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \quad (11.5)$$

limit(a_n , $n = \text{infinity}$)

$$\frac{1}{2} \quad (11.6)$$

Tämä tietysti näkyy suoraan yllä olevasta muodosta. Toisaalta Maplea ei olisi tarvinnut avustaa:

$$\frac{n}{2 \cdot n + 1}$$

$$\frac{n}{2n+1} \quad (11.7)$$

limit((11.7), $n = \text{infinity}$)

$$\frac{1}{2} \quad (11.8)$$

12.

Newtonin menetelmä sovellettuna "historialliseen" funktioon $f(x) = x^3 - 2x - 5$

a) Laske $\frac{d}{dx} f(x)$:

$$\text{> } f := x \rightarrow x^3 - 2 \cdot x - 5$$

$$f := x \rightarrow x^3 - 2x - 5 \quad (12.1)$$

$$\text{> } df := \text{diff}(f(x), x)$$

$$df := 3x^2 - 2 \quad (12.2)$$

Aika helppo!

b) Näytä, että yhtälöllä on ratkaisu välillä [2,3].

$$\text{> } f(2), f(3)$$

$$-1, 16 \quad (12.3)$$

Jatkuva funktio, erimerkkiset arvot => nollakohta ko. välillä.

c) Laske ratkaisulle 4:n iteraatioaskeleen approksimaatio Newtonin menetelmällä lähtien alkuarvosta $x_0 = 2$.

$$x_0 = 2. \quad (12.4)$$

$$> N := x \rightarrow x - \frac{f(x)}{D(f)(x)}$$

$$N := x \rightarrow x - \frac{f(x)}{D(f)(x)} \quad (12.5)$$

$$> N(x)$$

$$x - \frac{x^3 - 2x - 5}{3x^2 - 2} \quad (12.6)$$

$$> N(2.0)$$

$$2.100000000 \quad (12.7)$$

$$> \text{simplify}(N(x))$$

$$\frac{2x^3 + 5}{3x^2 - 2} \quad (12.8)$$

$$> NI := x \rightarrow (12.8)$$

$$NI := x \rightarrow \frac{2x^3 + 5}{3x^2 - 2} \quad (12.9)$$

$$> x[0] := 2.$$

$$x_0 := 2. \quad (12.10)$$

$$> x[0], N(x[0]), (N@N)(x[0]), (N@N@N)(x[0]), (N@@4)(x[0])$$
$$2., 2.100000000, 2.094568121, 2.094551482, 2.094551482 \quad (12.11)$$

$$> \text{seq}((N@@k)(x[0]), k = 1..5)$$
$$2.100000000, 2.094568121, 2.094551482, 2.094551482, 2.094551482 \quad (12.12)$$

Käytettiin hyväksi Maplen "yhdistetty funktio"-operaattoria @ ja iteraatio-operaattoria @@.
(Esim. $f@f@f$ on sama kuin $f@@3$)

Toisaalta voidaan laskea perinteisellä ohjelmointirakenteella: for - do - end do.

(Tällaisessa kumulatiivisessa iteraatiossa tehokkaampaakin, koska tuossa elegantissa @@-tavassa lasketaan jokainen komponentti uudestaan alusta alkaen.)

> **Digits := 20 : # Lisätään laskentatarkkuutta, nähdään paremmin
Newtonin # merkitsevien numeroiden nopea
(kvadraattinen) lisääntyminen.**

> **for k from 0 to 3 do**
 $x[k+1] := NI(x[k])$
end do;

$$x_1 := 2.10000000000000000000$$

$$x_2 := 2.0945681211041852182$$

$$x_3 := 2.0945514816981993027$$

$$x_4 := 2.0945514815423265914 \quad (12.13)$$

[> ?for
[>

13.

Todistustehtävä, Maplesta ei hyötyä.

14.

Olkoon $f(x) = a \cdot x + b$.

a) Laske $\int_0^1 f(x) \, dx$

b) Johda alasumman ja yläsumman kaavat s_n ja S_n tälle funktiolle, yleiset kaavat on annettu:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{ja} \quad s_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

c) Laske raja-arvot $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

Ratkaisut:

a)

$$f := x \rightarrow a \cdot x + b$$

$$x \rightarrow a \, x + b$$

(14.1)

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx \quad \# \text{ Erikoisen näköinen kirjoitusasu, kätkee Maple-kaavan } \text{Int}(\dots) = \text{int}(\dots)$$

$$\int_0^1 (a \, x + b) \, dx = \frac{1}{2} a + b$$

(14.2)

b) Kopioidaan yllä olevat summien kaavat, ensin yläsumma:

$$S_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{a \, i}{n} + b \right)}{n}$$

(14.3)

value((14.3))

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{a \, (n+1)^2}{n} - \frac{1}{2} \frac{a \, (n+1)}{n} + b \, (n+1) - b}{n}$$

(14.4)

Tässä olennainen työkalu oli aritmeettisen jonon summan kaava. Miellyttävää, että Maple hoitaa yksityiskohdat puolestamme.

Sievennystä varten viedään kursori kaavaan ja valitaan hiiren oikealla saatavasta "context sensitive"

valikosta "normal".

normal
→

$$\frac{1}{2} \frac{a n + a + 2 b n}{n} \quad (14.5)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} ((14.5))$

$$\frac{1}{2} a + b \quad (14.6)$$

Tämähän näkyy jakamalla termeittäin n:llä

Nyt alasumma:

$$s_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{a (i-1)}{n} + b \right)}{n} \quad (14.7)$$

value(s_n)

$$\frac{-\frac{3}{2} \frac{a (n+1)}{n} + b (n+1) + \frac{1}{2} \frac{a (n+1)^2}{n} + \frac{a}{n} - b}{n} \quad (14.8)$$

normal((14.8))

$$\frac{1}{2} \frac{-a + 2 b n + a n}{n} \quad (14.9)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} ((14.9))$

$$\frac{1}{2} a + b \quad (14.10)$$

(14.6) ja (14.10) merkitsevät, että funktio on integraalin määritelmän mukaan Riemann-integroituva välillä [0,1] ja integraalin arvo on tuo sama, joka jo yllä integroitiin.

Summauksesta:

Summan saattaminen n:n lausekkeeksi on yleisesti vaikea tai mahdoton tehtävä. Maple on siinä varsin taitava. Tehtävä on diskreetti versio integraalifunktion määrittämiselle (ja usein vaikeampikin). Tässä tapauksessa olennainen oli aritmeettisen summan kaava, joka Maplille on helppo nakki.

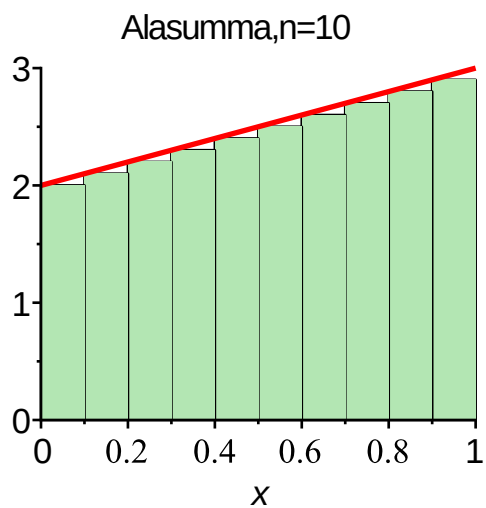
Piirretään vielä

with(student)

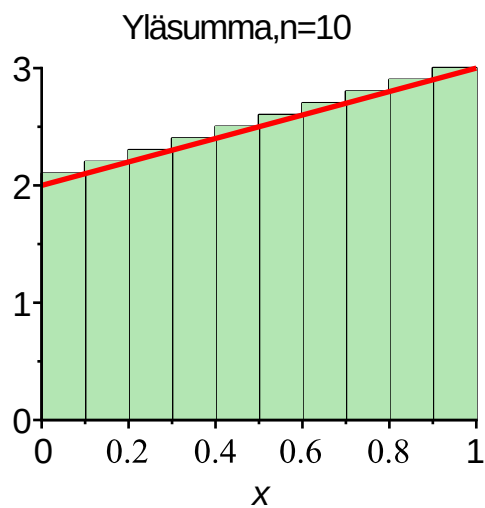
[D, Diff, Doubleint, Int, Limit, Lineint, Product, Sum, Tripleint, changevar, completesquare, distance, equate, integrand, intercept, intparts, leftbox, leftsum, makeproc, middlebox, middlesum, midpoint, powsubs, rightbox, rightsum, showtangent, simpson, slope, summand, trapezoid] (14.11)

a := 1 : b := 2 :

```
leftbox(f(x), x = 0 .. 1, 10, title  
= "Alasumma,n=10");
```



```
rightbox(f(x), x = 0 .. 1, 10, title  
= "Yläsumma,n=10");
```



15.

Geometrinen todistustehtävä. Maplesta ei apua muuta kuin ehkä kuvion piirtämisessä. Geometristen piirrosten alalla varmaankin Geogebra on paljon näppärämpi. Kukaties todistusta ideoidessa voisi olla apua, mutta jää minun puoleatani pelkäksi arvailuksi.

Loppukaneetti: Tästähän irtosikin paljon kokemusta, kiintoisampi ja opettavaisempi projekti, kuin osasin arvata.