Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3

Apiola/Arponen

Tentti 16.12. 1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Määritä q siten, että yhtälösysteemi

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ x + 7y - 6z = 6 \\ 3y + qz = t \end{cases}$$

   on singulaarinen (eli ratkaisuja on joko äärettömän monta tai ei lainkaan). Miten tulee tällöin valita t, jotta systeemillä olisi ratkaisuja. Määritä näillä valinnoilla se ratkaisu, jolle $z = 1$.

2. Ratkaise systeemi $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = (1, 0, 0)$, missä $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ Voit valita mieleisesi menetelmän. Mainittakoon, että yksi ominaisarvo $= 1$.

3. Ratkaise alkuarvotehtävä $y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} 0, t < 2 \\ 1, t > 2 \end{cases}$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$

4. Muodosta funktion $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi, \pi)$ Fourier-sarja seuraavasti:

   Laske ensin funktion $f(t) = t$, $t \in (-\pi, \pi)$ sinisarja ja sovella siihen termeittäistä integrointia (integroimalla ao. yhtälö puolittain vaikkapa välillä $t = 0..x$). Saat pitää tunnettuna summaa: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

5. Laske $\oint_C (\sin z + \frac{1}{z}) dz$, missä C on yksikköympyrä vastapäivään kierrettynä.

Mukana saa olla **ei**-ohjelmoitava laskin. Käytettävissä on myös alla oleva minirautaisannos matematiikan kaavoja.

Hyödyllisiä kaavoja

Fourier-kaavoja

Yleinen tapaus, f määritelty välillä $(-L, L)$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$
$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$, $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$

Puolen jakson laajennukset, f **määritelty välillä** $(0, L)$

Sinisarja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (HS_1, HS_2)$$

Kosinisarja

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (HC_1 - HC_3)$$

Nejännesjakson laajennukset, f **määritelty välillä** $(0, L)$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{2L} dx \qquad (QS_1, QS_2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2L}, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{2L} dx \qquad (QC_1, QC_2)$$

Trigonometrian kaavoja

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin ix = i\sinh x, \quad \cos ix = \cosh x$

Laplace-muunnoksia

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio

.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \quad L(f*g) = (Lf)(Lg), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

$\delta(t-a)$ tarkoittaa *Dirac'n* δ:aa.