Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

8. harj. viikko 45 (4 – 8.11)

```
GREE: CH 12 s. 538 ->
KRE: CH 6 s. 261  ->
TE: DYS-monistetta, www:ssä ( linkki: Oppikirjoja ...)
    ss. 56--60 Numeerisia menetelmiä
Matlab-ohjeita: kotisivun kohdasta: Oppikirjoja, ohjelmisto-oppaita ja -linkkejä
Laplace-muunnostaulukot tehtäväpaperin lopussa

Maple: with(linalg): laplace, invlaplace, convert(lauseke,parfrac,muuttuja);
```

Alkuviikko

1. a) Millä p:n arvoilla (jos millään) integraali $\int_0^\infty t^{-p}dt$ suppenee?

   b) Osoita, että $\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}dt$ suppenee, kun $\alpha > -1$.

2. Paloittain jatkuva funktio f on *exp-kertalukua*, jos on olemassa vakiot K, c, T siten, että

   $|f(t)| \leq Ke^{ct}, \quad \forall t \geq T$ (Tässä on *Greenbergissä* painovirhe.)

   a) Osoita, että e^{t^2} ei ole exp-kertalukua.

   b) Onko exp-kertalukua olevan funktion derivaatta exp-kertalukua. Vihje: tarkastele vaikkapa funktiota $f(t) = \sin(e^{t^2})$.

3. a) Määritä funktioiden $\sin^2 \omega t$ ja $\cos^2 \omega t$ Laplace-munnokset.

   Huom: Kun saat toisen, niin toinen tulee kaavaa $\sin^2 + \cos^2 = 1$ hyödyntäen.

   b) Määritä $\mathbf{L}\{e^{\alpha t} \cos \omega t\}$ ja tarkista tulos L-muunnostaulukosta.

   Huom: Voit käyttää osoittaisintegrointia tai yhtälöä $\cos \omega t = Re e^{i\omega t}$.

   Kokeile myös MAPLE:lla suoraan määritelmän mukaan (siis `int`-komennolla) ja lisäksi `linalg`:ssa olevalla `laplace`-komennolla. Huom! `int`-komento ei aina osaa määrätä raja-arvoa, usein täytyy laskea integraali muodossa `int(f*exp(...),t=0..b)` ja sitten selvittää (esim. kynää ja paperia käyttäen) raja-arvo.

4. Määritä funktioiden

   $$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1,2] \\ 0, & t \notin [1,2] \end{cases}$$

   ja

   $$g(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

   Laplace-muunnokset. Tarkista MAPLE:lla suoraan `int`-komentoa käyttäen. Kokeile myös huvin vuoksi: `plot(Heaviside(t-1)-Heaviside(t-2),t=-1..5);` ja mieti asiaa. Voit tarjoilla tämän funktion myös suoraan `laplace`:lle. (Sopivasti modifioiden myös b)-kohdassa.)

5. Hyödynnä derivaatan (tarvittaessa korkeampienkin) Laplace-muunnosta seuraavissa L-muunnostehtävissä:

   a) $t \cos t$, **b)** te^{-5t}, **c)** $\cosh^2 t$

6. Funktioiden f ja g konvoluutio määritellään kaavalla

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Määritä konvoluutiolauseen $L(f*g) = (Lf)(Lg)$ avulla seuraavien funktioiden Laplace-käänteismuunnokset:

a) $\frac{1}{(s-a)^2}$ **b)** $\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$ **c)** $\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$

Loppuviikko

1. Eulerin menetelmän yksi askel lineaarisen homogeenisen systeemin $x' = Ax$ tapauksessa voidaan MATLAB:lla toteuttaa tyyliin:

```
t0=0;x0=[..;..];h=..;t1=t0+h;x1=x0+h*A*x0
```

Tee tämä itsellesi selväksi. Eulerin menetelmän etenemistä aikariippuvuuskuvassa voit seurata iteroimalla riviä `t1=t0+h;x1=x0+h*A*x0;hold on;plot([t0,t1]',[x0,x1]'),t0=t1;x0=x1`

Laske ja piirrä kankean tehtävän (harj 7, alkuviikko teht. 5) [1] tapausta välillä $[0, 0.1]$ ja piirrä `linsys`-ratkaisu (muistathan `linsys`:n) lisäksi väleillä $[0, 1]$ ja $[0, 10]$.

2. *"Backward Euler"* (BE) on implisiittisten menetelmien kantaäiti: $x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$.

Tarkastellaan lineaarista homogeenista systeemiä $x' = Ax$.

a) Osoita, että BE- kaava voidaan kirjoittaa ratkaistuun muotoon: $x_{n+1} = (I - hA)^{-1}x_n$.

b) Miksi matriisi $I - hA$ on aina kääntyvä, jos tehtävä on kankea?

c) Modifioi edellisen tehtävän suoritusta niin, että korvaat *Eulerin* (BE):lla. Katso kuvia ja mykisty!

3. Ratkaise alkuarvotehtävä $y'' + 4y' + 13y = 20e^{-t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3$

Laplace-muunnoksen avulla. Voit soveltaa MAPLE:n `laplace, invlaplace, solve, convert(F,parfrac,s)`, ym. komentoja.

Vast: $y(t) = 2e^{-t} + e^{-2t}\sin 3t - e^{-2t}\cos 3t$

Vasta tarkistukseen: `dsolve({diffyht,y(0)=1,D(y)(0)=3},y(t));` (voit joutua miettimään sievennyskomentoja).

4. Lausu seuraavat funktiot Heavisiden funktion H avulla: Piirrä kuvaajat. Muista: MAPLE:ssa on funktio `Heaviside`.

[1] $A = \begin{bmatrix} 998 & 1998 \\ -999 & -1999 \end{bmatrix}$

5. Ratkaise alkuarvotehtävä $\ddot{x} + 2\dot{x} = H(t-1), \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1.$

6. Ratkaise diffyhtälösysteemi

$$\begin{cases} y_1' + y_2' = -\sin t \\ y_2' + y_3' = \cos t + (1/10)\exp(-t/10) \\ y_3' + y_1' = (1/10)\exp(-t/10) - \sin t \end{cases}$$

, kun alkuehdot ovat $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0$.

Käytä Laplace-muunnosta, saat tehdä eri vaiheet MAPLE:lla ja/tai käsin (ei tietenkään suoraan dsolvella). Piirrä "faasiavaruuskuva" `spacecurve-funktiolla` esim. välillä $t \in [0, 8\pi]$. Huom: Systeemi ei ole autonominen, mieti, mitä tällainen kuva kertoo ja mitä ei verrattuna autonomisen systeemin tapaukseen.

Laplace-muunnoksia

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \quad L(f*g) = (Lf)(Lg), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

$\delta(t-a)$ tarkoittaa *Dirac'n* δ:aa.