Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu
Somersalo/Weikkolainen

Mat-1.422 Matematiikan peruskurssi S2

Tentti 07.01.2002

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

1. Tutki, suppenevatko seuraavat sarjat:

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n+1)}, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}.$$

Perustele huolellisesti päätelmäsi.

2. Laske avaruusintegraali

$$\iiint_V \frac{dV}{1+x^2+y^2+z^2},$$

kun $V = \{(x,y,z) \mid x \leq 0,\ y \leq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$, missä $R > 0$.

3. Laske tasointegraali

$$\iint_R \frac{e^{x-y}}{x+y}dA,$$

missä R on suorakaide, jota rajoittavat suorat $y = x$, $y = x+5$, $y = 2-x$ ja $y = 4-x$. (Vihje: Tee muuttujanvaihto $u = x-y$, $v = x+y$.)

4. a) Olkoot $\varphi(x,y,z)$ ja $\psi(x,y,z)$ kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia skalaarifunktioita ja lisäksi $\psi \neq 0$ kaikkialla. Sievennä $\mathbf{F} = \psi^2\,\nabla\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)$ ja laske $\nabla\cdot\mathbf{F}$.

   b) Olkoot edellä lisäksi φ ja ψ *harmonisia*, ts. molemmat toteuttavat yhtälön

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Olkoon $\mathcal{S}$ "riittävän säännöllinen" umpinainen pinta. Laske vektorikentän $\mathbf{F}$ vuo (*flux*) pinnan $\mathcal{S}$ läpi.

5. Laske Stokesin lauseen avulla viivaintegraali

$$\oint_{\mathcal{C}} y^3\,dx - x^3\,dy,$$

kun $\mathcal{C}$ on ympyrä $z = 1$, $x^2+y^2+z^2 = 4$ ja kiertosuunta on "ylhäältä katsoen vastapäivään".

6. Ratkaise differentiaaliyhtälö $2y'' + 5y' + 2y = 6e^{-2x}$.