Teknillinen korkeakoulu Somersalo

Mat-1.322 Matematiikan peruskurssi S 2

Tentti 04/11/1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:

1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;

2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;

3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);

4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;

5) nimikirjoitus.

1. Olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio. Tiedetään, että tason pisteen $(x, y) = (1, g(1))$ kautta kulkevan g:n kuvaajan tangenttisuoran yhtälö on $y = 2x - 3$. Määritellään kahden muuttujan funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kaavalla
$$f(x,y) = g\left(\frac{5(e^y + x^2 y)}{(x+1)^2 + 1}\right).$$
Määritä pisteen $(x, y, z) = (1, 0, f(1, 0))$ kautta kulkevan f:n kuvaajan tangenttitason yhtälö.

2. Osoita, että yhtälöt
$$\begin{aligned} xy^2 + zu + v^2 &= 3 \\ x^3 z + 2y - uv &= 2 \\ xu + yv - xyz &= 1 \end{aligned}$$
määräävät funktiot
$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$
pisteen $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$ ympäristössä. Laske myös $(\partial y/\partial u)v$ pisteessä $(u, v) = (1, 1)$.

3. Laske viivaintegraali $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

   (a) suoraan määritelmää käyttäen,

   (b) Greenin kaavalla,

   kun $\vec{F}$ on tason vektorikenttä
$$\vec{F} = xy\vec{i} - x^2\vec{j},$$
ja C on sen kolmion myötäpäivään suunnistettu kehä, jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(2, 0)$ ja $(2, 4)$.

4. (a) Osoita, että kun $\vec{c}$ on vakiovektori ja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, niin

$$\nabla(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \vec{c}, \quad \nabla \cdot (\vec{c} \times \vec{r}) = 0.$$

(b) Akselin ympäri vakiokulmanopeudella kiertävän kappaleen nopeusvektori $\vec{v}$ saadaan kaavasta

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

missä $\vec{\omega}$ on kiertoakselin suuntainen kulmanopeusvektori, joka siis tässä oletetaan vakiovektoriksi, ja $\vec{r}$ on kappaleen paikkavektori. Osoita, että

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v}.$$

5. Ratkaise homogeeninen differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + 2y^2}.$$