Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopiston Teknillinen korkeakoulu

Malinen – Aalto

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

3. välikoe 13.12.2010

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskokeessa sallittuja laskimia.
Koeaika on 3h.

1. Tarkastellaan differentiaaliyhtälösysteemiä $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, jossa $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Onko mahdollista valita alkuehto $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ siten, että ratkaisu kasvaa rajattomasti kun $t \to \infty$? Jos mahdollista, anna esimerkki tällaisesta alkuarvosta $\mathbf{x}_0$.

2. a) Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x^2 \cos \frac{1}{x})$$

b) Laske joko l'Hospitalin säännöllä tai Taylorin polynomilla raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1-x)}.$$

3. a) Laske määrämätön integraali (eli "antiderivaatta")

$$\int \frac{5-x}{2x^2+x-10} dx.$$

b) Laske integraalit

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx \quad \text{ja} \quad \int_0^{2\pi} x^2 \sin^2 x \, dx\,.$$

Vihje: Jälkimmäisessä tapauksessa lausu $\sin^2 x$ funktion $\cos 2x$ avulla tunnettua trigonometrian kaavaa käyttäen.

4. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehtävä $x'(t) - 9x(t) = \sin 2t$, $x(0) = 0$.

Vihje: Tarvittavia Laplace-muunnoskaavoja koepaperin kääntöpuolella.

Funktio $f(t), t \geq 0$	**Laplace-muunnos** $\hat{f}(s)$
1	$\frac{1}{s}$ kun $s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ kun $s > \max(0, a)$
$\sin bt;\quad b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$ kun $s > 0$
$\cos bt;\quad b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$ kun $s > 0$
$t^n;\quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ kun $s > 0$
$t^n e^{at};\quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ kun $s > \max(0, a)$
$e^{at} \sin bt;\quad a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ kun $s > 0$
$e^{at} \cos bt;\quad a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ kun $s > 0.$

1. Lasketaan A:n ominaisarvot:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Vastaus kysymykseen: kyllä on. Itse asiassa ratkaisu kasvaa rajattomasti kaikilla paitsi sellaisilla alkuarvoilla x_0, jotka ovat muotoa $x_0 = a x_2$, missä x_2 on λ_2:ita vastaava ominais-vektori. Erityisesti jos valitaan $x_0 = x_1$, on ratkaisu $x(t) = e^{2t} x_1$, joka kasvaa rajatta. Lasketaan vielä x_1:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.) a) l'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - x^2\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-2/x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2/x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-2/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Taylor:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - x^2\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x^2 - x^2 + x^2\cdot\frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

b) l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-\frac{1}{1-x}} = -1$$

Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{-x + O(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-1 + O(x)} = -1$$

3. a)

$$\int \frac{5-x}{2x^2+x-10}\,dx$$

Halutaan osamurtohajotelma. Lasketaan nimittäjän nollakohdat:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-10)}}{4} = \frac{-1 \pm 9}{4}$$

$x = 2$ tai $x = -\frac{5}{2}$

$$= \int \frac{5-x}{(x-2)(2x+5)}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{2x+5}\right) dx$$

$$= \int \frac{(2A+B)x + 5A - 2B}{(x-2)(2x+5)}\,dx$$

$$\begin{cases} 2A + B = -1 \\ 5A - 2B = 5 \end{cases}$$

$A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{5}{3}$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x-2} - \frac{\frac{5}{3}}{2x+5}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{5}{6}\ln|2x+5| + C$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\sin^3 x = \frac{1}{3}$

Vihjeen "tunnettu trigonometrinen kaava":

$$\sin^2 x = \left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{i\cdot 2x} + e^{-i\cdot 2x} - 2\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{i\cdot 2x} + e^{-i\cdot 2x}\right)}_{\cos 2x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x^2\left(1 - \cos(2x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big/_0^{2\pi} \frac{1}{3}x^3 - \underbrace{\frac{1}{2}\Big/_0^{2\pi} x^2 \cdot \frac{1}{2}\sin(2x)}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x \sin(2x)\, dx$$

$$= \frac{4}{3}\pi^3 + \frac{1}{2}\Big/_0^{2\pi} x \cdot \frac{1}{2}\cdot\left(-\cos(2x)\right) dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cdot\left(-\cos(2x)\right) dx$$

$$= \frac{4}{3}\pi^3 - \frac{\pi}{2} + \underbrace{\Big/_0^{2\pi} \frac{1}{8}\sin(2x) dx}_{=0} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi^3 - \frac{\pi}{2}}}$$

4. $x'(t) - 9x(t) = \sin(2t)$, $x(0) = 0$

Laplace-muunnetaan puolittain:

$$(s-9)\hat{x}(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

osamurtohajotelma

$$\Rightarrow \hat{x}(s) = \frac{2}{(s^2+4)(s-9)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{C}{s-9}$$

$$= \frac{(A+C)s^2 + (B-9A)s + 4C - 9B}{(s^2+4)(s-9)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ B - 9A = 0 \\ 4C - 9B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{2}{85} \\ B = -\frac{18}{85} \\ C = \frac{2}{85} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{x}(s) = -\frac{2}{85} \cdot \frac{s}{s^2+4} - \frac{9}{85} \cdot \frac{2}{s^2+4} + \frac{2}{85} \cdot \frac{1}{s-9}$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{2}{85}\cos(2t) - \frac{9}{85}\sin(2t) + \frac{2}{85}e^{9t}$$