Matematiikka
Aalto-yliopisto

Malinen – Talponen – Aalto

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

2. välikoe 15.11.2009

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää YO-kokeessa hyväksyttyä laskinta. Koeaika on 3h.

1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivoituva funktio, josta on tiedossa seuraavia asioita: $f(0) = 1,\ f'(0) = 2,\ f''(0) = 4$ ja $f'''(0) = 8$. Tässä tehtävässä ajatellaan, että funktio on derivoituvuudensa lisäksi muutenkin hillitysti käyttäytyvä. Anna näillä tiedoilla järkevä approksimaatio arvolle $f(1)$.

2. a) Muotoile (ϵ-δ) määritelmä funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvuudelle pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$ (2p).

   b) Todista määritelmästä lähtien, että $f(x) = x^2 + 5$ on jatkuva kohdassa $x = 2$ (4p).

3. a) Etsi jokin yksittäisratkaisu differentiaaliyhtälölle

   $$x'(t) - x(t) = e^t \sin t \quad \text{ jossa } t \geq 0.$$

   Vihje: Rakenna yrite funktioista e^t, $\sin t$, ja $\cos t$.

   b)Tarkastellaan kuormittamattoman massajousisysteemin differentiaaliyhtälöä

   $$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0 \quad \text{ kun } \quad t \geq 0.$$

   Etsi yhtälön ratkaisu alkuehdoilla $y(0) = 1$ ja $y''(0) = -1$. Jos yhtälö kuvaa massapisteen (SI-yksiköissä lukuarvot massa $m = 1$, kitkatekijä $\mu = 4$ ja jousivakio $k = 5$) liikettä tasapainoasemansa ympärillä, niin miten toista derivaattaa koskeva alkuehto $y''(0) = 1$ on fysikaalisesti tulkittava?

4. Etsi epähomogeenisen differentiaaliyhtälön $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^{\alpha t}$ yleinen ratkaisu, kun $\alpha \neq 1$ tai -3. Mitä tapahtuu yleisen ratkaisun lausekkeelle kun $\alpha \to 1$?

Jokeritehtävä: Jos koeaikaa on jäljellä, niin keksipä yksittäisratkaisu tehtävän 4. epähomogeeniselle yhtälölle tapauksessa $\alpha = 1$. Jokeritehtävästä voit saada tämän välikokeen pistemääräsi yhden lisäpisteen, mutta välikokeen maksimipistemäärä on silti 24p.

1.

Approksimaatio nollan ympäristössä saadaan Taylorin polynomilla

$$T(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3,$$

josta saadaan $T(1) = \frac{19}{3}.$

Virhe $\leq \frac{1}{24} \cdot \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)|$.

(tosin virhettä ei kysytty)

3p tehnyt jonkin approksimaation
3p approksimaatio järkevä (Taylor)
-1p laskuvirheitä

2.) a)

f jatkuva pisteessä a, mikäli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{s.e.}$$

$$|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$ 2

b) Nyt $a = 2$, $f(x) = x^2 + 5$ ja $f(2) = 9$.

Kiinnitetään $\varepsilon > 0$.

Nyt $|f(x) - f(2)| = |x^2 + 5 - 9| = |x^2 - 4|$

$$= |(x-2)(x+2)| = |x-2| \cdot \underbrace{|x+2|}_{<5, \text{ kun } |x-2|<1}$$ 1p 1p

Jos nyt valitaan $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$, 1p

niin

$$|x-2| < \delta \implies |f(x) - f(2)| = |x-2| \cdot |x+2|$$

$$< \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon ,$$ 1p

eli f on jatkuva pisteessä $x = 2$.

a)-KOHDASTA 1p JOS JÄRKEVÄ KUVA ASIASTA MERKINTÖINEEN MUTTEI ITSE MÄÄRITELMÄÄ

3. a)

Kokeillaan $x(t) = -e^t \cos t$ (2 p.)

$$x'(t) = -e^t \cos t + e^t \sin t$$

$$\Rightarrow x'(t) - x(t) = e^t \sin t$$

---

b) $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0$

Yrite $y(t) = e^{rt}$ johtaa karakteristiseen yhtälöön

$$r^2 + 4r + 5 = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5}}{2} = -2 \pm i.$$

Saatiin kompleksinen juuri pari, jolloin ratkaisu voidaan kirjoittaa muotoon

$$y(t) = e^{-2t}(A \sin t + B \cos t). \quad 1\ p$$

Alkuehdot $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y''(0) = -1 \end{cases}$

3.1

Kosska DY:n on toteuduttava myös hetkellä $t=0$, saadaan

$$-1+4y'(0)+5=0 \Rightarrow y'(0)=-1.$$

$$y(0)=B=1$$

$$y'(t)=-2e^{-2t}(A\sin t+B\cos t)$$
$$+e^{-2t}(A\cos t-B\sin t)$$

$$y'(0)=-2B+A=-1$$

$$\Rightarrow A=2B-1=1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t)=e^{-2t}(\sin t+\cos t)}}$$ 2 p

Tulkinta alkuehdolle $y''(0)=1$:
Hetkellä $t=0$ vaikuttaa kappaleeseen voima, jonka suuruus on 1. 1p

3.2

$\boxed{4.}$ $y'' + 2y' - 3y = e^{\alpha t}$

Homogeeniyhtälön $y'' + 2y' - 3y = 0$ yleinen ratkaisu on $y_h(t) = Ae^t + Be^{-3t}$ (1p) sillä $(r-1)(r+3) = r^2 + 2r - 3$ on DY:n karakteristinen polynomi.

(2p)

Kokeillaan yritettä $y_T(t) = Ce^{\alpha t}$ (1p) täydelliseen yhtälöön:

$$y_T'' + 2y_T' - 3y_T = (\alpha^2 + 2\alpha - 3)Ce^{\alpha t} = e^{\alpha t}$$

$$\Longrightarrow C = \frac{1}{\alpha^2 + 2\alpha - 3} \text{ (1p)}, \text{ kun } \alpha \neq 1 \text{ ja } \alpha \neq -3.$$

Siis

$$y(t) = Ae^t + Be^{-3t} + \frac{1}{\alpha^2 + 2\alpha - 3} e^{\alpha t} \text{ (1p)}, \text{ kun } \alpha \neq 1 \text{ ja } \alpha \neq -3.$$

Jos $\alpha \to 1$ tai $\alpha \to -3$, termin $e^{\alpha t}$ kerroin $\to \infty$. (1p) Jos siis $\alpha = 1$ tai $\alpha = -3$, ei tämä yrite toimi.

$\boxed{\text{JOKERI}}$ Jos $\alpha = 1$, toimii yrite $y_T(t) = Cte^t$, sillä $y_T' = Ce^t + Cte^t$ ja $y_T'' = 2Ce^t + Cte^t$, joten $y_T'' + 2y_T' - 3y_T = 4Ce^t = e^t$, kun $C = \frac{1}{4}$.

Yksittäisratkaisu on siis $y_T(t) = \frac{1}{4}te^t$. (1p)

$\boxed{4.1}$