Aalto-yliopisto
Matematiikan laitos

Talponen, Malinen, Aalto

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

Välikoe, 11.10.2010 klo 16-19

Ylioppilastutkinnossa hyväksytyt laskimet on tässäkin sallittu.

Vastaa seuraaviin tehtäviin. Kaikista tehtävistä saa 6 pistettä.

Muista perustella selkeästi ratkaisusi.

T1. Esitä $\frac{1+2i}{3+4i}$ polaarimuodossa.

T2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

kääntämällä matriisi.

T3. Päättele kerroinmatriisin determinanttia tutkimalla, että seuraavalla yhtälöryhmällä on korkeintaan yksi ratkaisu (3p).

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{cases}$$

Ratkaise yhtälöryhmä Gaussin eliminoinnilla (3p).

T4. Laske A^{2010}, missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

T1

$$z = \frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}$$

$$= \frac{11+2i}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25} i$$

$$z = re^{i\varphi},$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{11}{25}\right)^2 + \left(\frac{2}{23}\right)^2} = \sqrt{5}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2}{11}\right) = \ldots$$

Jakolasku 2 p

polaarimuodon idea 2 p

laskut 2 p

T2

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&1&1\\2&1&2\end{array}\right.}_{A}\left.\begin{array}{|ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \leftarrow -r_1\\ \leftarrow -2r_1\end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&1&2&-2&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow -r_2\end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \leftarrow -r_3\\ \\ \end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right.\underbrace{\left.\begin{array}{|ccc}1&0&0\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{array}\right]}_{A^{-1}}$$

Pisteytys:

- gaussaamisen idea 4 p.
- Laskut 2 p.
- Mikäli gaussattu vain [A:b] eikä laskettu A^{-1} ⇒ vähennys 2 p.

Tarkistus:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\2&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Nyt

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}}$$

T3

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3-(-1) - (-3-2) - (1-2)$$

$$= 4+5+1 = 10 > 0$$ $\Rightarrow$ ryhmällä täsmälleen yksi ratkaisu.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow -r_1 \\ \leftarrow +r_1 \end{array}$$

Toki helpommalla determinantin saa tästä

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow 5x_3 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_3 = \tfrac{1}{5}}} \quad \left(= \tfrac{2}{10}\right)$$

$$r_2 \Rightarrow 2x_2 = 3x_3 = \frac{3}{5} \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = \frac{3}{10}}}$$

$$r_1 \Rightarrow x_1 = x_2 - 2x_3 + 1 \underline{\underline{= \frac{9}{10}}}$$

[4]

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1=1, \quad x_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_2=2, \quad x_2=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad V^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=V\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}V^{-1}$$

$$A^{2010}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^{2010}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 2^{2010}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3(2^{2010}-1)\\ 0 & 2^{2010}\end{bmatrix}.$$

Ja $2^{2010} \sim 10^{204}$