Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopiston Teknillinen korkeakoulu

Malinen – Aalto

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

3. välikoe 14.12.2009

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa EI saa käyttää mitään sähköllä toimivia apuvälineitä paitsi sydämentahdistimia. Koeaika on 3h.

1. Laske joko l'Hospitalin säännöllä tai Taylorin polynomilla raja-arvot

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2(x)}{x^4};\qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1-x)}.$$

2. Näin joulun lähestyessä muistellaan usein entisaikojen idyllistä elämänmuotoa, jolloin nurkistaan jäätyneen matalan multapenkkatalon homehtuneille lattialankuille oli tapana levitellä olkia lasten iloksi & talikynttilöiden aiheuttaman tulipalovaaran maksimoimiseksi. Tuberkuloosin ja isorokon riuduttamalla kansanosalla ei ollut varaa edes neljän desimaalin logaritmitauluihin, joita porvarisperheiden penskat koronkiskontaleikeissään jo kilvan käyttivät. Entisaikojen sankareita kunnioittaaksesi laske likiarvo $b \approx \sin\sqrt{10}$ lineaarisella approksimaatiolla seuraavan reseptin mukaisesti:

   a) Anna lineaarisen approksimaation $L(x)$ kaava funktiolle $f(x) = \sin\sqrt{x}$ pisteessä $a = \pi^2$. Laske tämän avulla numeerinen arvo $b = L(10)$.

   b) Arvioi virhettä $\sin\sqrt{10} - b$ käyttäen Lagrangen lineaarisen approksimaation virhekaavaa

$$f(x) - L(x) = \frac{f''(\eta)}{2}(x-a)^2 \text{ jossa } \eta \in (a, x)$$

   ja sellaisia epäyhtälöitä, jotka tekevät laskun helpoksi.

   Vihje: Likiarvojen määräämiseksi riittää tietää $\pi = 3.1415926\ldots$ ja $1/\pi = 0.31830989\ldots$, jotka laskettiin jo viime jouluna. Tehtävän a-kohdasta saa max. 4p, ja b-kohdasta 2p.

3. a) Laske määrämättömät integraalit (eli "antiderivaatat")

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5}dx \quad \text{ja} \quad \int \frac{5-x}{x(x-1)^2}dx.$$

   b) Laske (kaksi kertaa) osittaisintegroimalla

$$\int_0^1 e^{2x}\sin x\,dx\,.$$

4. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehtävä $x''(t) - 9x(t) = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

   Vihje: Tarvittavia Laplace-muunnoskaavoja koepaperin kääntöpuolella.

1.

a) l'Hôpital: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos^2 x+2\sin^2 x}{12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos x\sin x+4\sin x\cos x}{24x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{8\cos^2 x-8\sin^2 x}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

l'Hôpitalin sääntöä käytettiin 4 kertaa.

Taylor: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\left(x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5)\right)^2}{x^4}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\left(x^2-\frac{2}{6}x^4+O(x^6)\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+O(x^2)\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

---

b) l'Hôpital: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-1/(1-x)} = -1$

Taylor: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{-x+O(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-1+O(x)} = -1$

1.1

2. a) $L(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$

Lasketaan $f(a) = \sin\sqrt{\pi^2} = 0$

$f'(a) = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=\pi^2} = -\frac{1}{2\pi}$

$$\Rightarrow \boxed{L(x) = -\frac{x-\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2\pi}}$$

$L(10) = \frac{\pi}{2} - \frac{10}{2\pi} = \frac{\pi}{2} - 5 \cdot \frac{1}{\pi}.$

Lasketaan $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{array}{r} 1{,}5707963 \\ 2\,\overline{)3{,}1415926} \\ -2 \\ \hline 11 \\ -10 \\ \hline 14 \\ -14 \\ \hline 15 \\ -14 \\ \hline 19 \\ -18 \\ \hline 12 \\ -12 \\ \hline 06 \end{array}$$

ja $5 \cdot \frac{1}{\pi}$:

$$\begin{array}{r} 0{,}31830989 \\ \cdot\ 5 \\ \hline 1{,}59154945 \end{array}$$

Ja $\frac{\pi}{2} - 5 \cdot \frac{1}{\pi}$:

$$\begin{array}{r} 1{,}59154945 \\ -1{,}5707963 \\ \hline 0{,}0207532 \end{array}$$

eli $L(10) \approx -0{,}02075$

(oikeasti $\sin\sqrt{10} \approx -0{,}02068$)

2.1

2. b)

$$f'(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{4x} - \frac{\cos\sqrt{x}}{4x^{3/2}}$$

$$f(x) - L(x) = \frac{f''(\eta)}{2}(x-a)^2 = -\left(\frac{\sin\sqrt{\eta}}{8\eta} + \frac{\cos\sqrt{\eta}}{8\eta^{3/2}}\right)(10-\pi^2)^2$$

Arvioidaan virheen suuruutta.

$$\left|\left(\frac{\sin\sqrt{\eta}}{8\eta} + \frac{\cos\sqrt{\eta}}{8\eta^{3/2}}\right)(10-\pi^2)^2\right|$$

$$\leq \left(\frac{\sqrt{10}-\pi}{8\eta} + \frac{1}{8\eta^{3/2}}\right)(10-\pi^2)^2$$

$$\leq \left(\frac{0{,}06}{72} + \frac{1}{216}\right)\cdot \underbrace{0{,}15^2}_{=0{,}0225}$$

$$\leq (0{,}001 + 0{,}005)\cdot 0{,}03$$

$$\leq 0{,}0002$$

Arvioita:

$|\sin\sqrt{\eta}| \leq |\sqrt{\eta} - \pi| \leq |\sqrt{10} - \pi|$
$\leq |3{,}2 - 3{,}14| = 0{,}06$

$|10 - \pi^2| \leq |10 - 3{,}14^2|$
$\leq |10 - 9{,}85|$
$= 0{,}15$

$$\begin{array}{r} 3{,}14 \\ \cdot\, 3{,}14 \\ \hline 1256 \\ 314 \\ +\,942 \\ \hline 9{,}8596 \end{array}$$

$\eta \geq 9$
$\eta^{\frac{3}{2}} \geq 27$

(oikea virhe $\approx 0{,}00007$)

2.2

3. a)

nimittäjän derivaatta

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \left(\frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{3}{(x+2)^2+1}\right) dx$$

nimittäjä jaoton ($>0\ \forall x \in \mathbb{R}$)

$$= \ln(x^2+4x+5) - 3\arctan(x+2) + C$$

osamurtokehitelmä:

$$\frac{5-x}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+1} = \frac{A(x^2-2x+1)+Bx^2+Cx}{x(x-1)^2}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(-2A+C)x+A}{x(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 5 \\ -2A+C = -1 \\ A+B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = -5 \\ C = 9 \end{cases}$$

$$\int \frac{5-x}{x(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{5}{x} + \frac{-5x+9}{(x-1)^2}\right) dx = \int \left(\frac{5}{x} + \frac{-\frac{5}{2}(2x-2)}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^2}\right) dx$$

$$= 5\ln|x| - \frac{5}{2}\ln(x-1)^2 - \frac{4}{x-1} + C$$

$$= 5\ln|x| - 5\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C$$

3.1

$\boxed{3.}$ b)

$$\int_0^1 \underbrace{e^{2x}}_{f'} \underbrace{\sin x}_{g}\, dx = \Big|_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\cos x\, dx$$

$$= \frac{e^2}{2}\sin 1 - \Big|_0^1 \frac{1}{4}e^{2x}\cos x - \int_0^1 \frac{1}{4}e^{2x}\sin x\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}\int_0^1 e^{2x}\sin x\, dx = \frac{e^2}{2}\sin 1 - \frac{e^2}{4}\cos 1 + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{2x}\sin x\, dx = \frac{2e^2\sin 1 - e^2\cos 1 + 1}{5}$$

$\boxed{3.2}$

$\boxed{4.}$ $\begin{cases} x''(t) - 9x(t) = t \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 \end{cases}$

Laplace-muunnetaan puolittain:

$$s^2 \hat{x}(s) - \underbrace{f'(0)}_{=1} - s\underbrace{f(0)}_{=0} - 9\hat{x}(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow (s^2 - 9)\hat{x}(s) = \frac{s^2+1}{s^2}$$

$$\Rightarrow \hat{x}(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s^2-9)}$$

Sitten käänteismuunnos:

$$\hat{x}(s) = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s+3}$$

$$= \frac{(As+B)(s^2-9) + Cs^2(s+3) + Ds^2(s-3)}{s^2(s^2-9)}$$

$$= \frac{(A+C+D)s^3 + (B+3C-3D)s^2 - 9As - 9B}{s^2(s^2-9)}$$

$$\begin{cases} -9B = 1 \\ -9A = 0 \\ B + 3C - 3D = 1 \\ A + C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{9} \\ 6C = \frac{10}{9} \Rightarrow C = \frac{5}{27} \\ D = -C = -\frac{5}{27} \end{cases}$$

$\boxed{4.1}$

4.

$$\hat{x}(s) = -\frac{1/9}{s^2} + \frac{5/27}{s-3} - \frac{5/27}{s+3}$$

$$\Longrightarrow x(t) = -\frac{1}{9}t + \frac{5}{27}e^{3t} - \frac{5}{27}e^{-3t}$$

Tarkistus:

tosiaan $x'' - 9x = t$

$$x(0) = 0$$

$$x'(t) = -\frac{1}{9} + \frac{5}{9}e^{3t} + \frac{5}{9}e^{-3t}$$

$$x'(0) = 1$$

$\boxed{\text{OK}}$

4.2