Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopiston Teknillinen korkeakoulu

Malinen – Aalto

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

2. välikoe 16.11.2009

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ⋆-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa EI saa käyttää mitään sähköllä toimivia apuvälineitä.
Laskutikku on sallittu, mutta tuskin hyödyllinen. Koeaika on 3h.

1. Määritä luku $p > 0$ siten, että raja-arvo

$$L(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{\sqrt{x + h^p} - \sqrt{x}} \qquad \text{jossa} \quad x > 0$$

   on olemassa positiivisena reaalilukuna. Laske tällöin luku $L(x)$ kullakin $x > 0$.

   Vihje: Käytä hyväksesi tunnettua raja-arvoa $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = ?$

2. a) Etsi käyrän $x + y^2 + y \sin x = y^3 + \pi$ tangentin yhtälö pisteessä $(x, y) = (\pi, 1)$.

   b) Määritellään funktio $f(x) = \ln x + x^2$ määrittelyjoukossa $x > 0$. Hahmottele kuvaajaa. Miksi f:llä on käänteisfunktio; perustele tämä matemaattisesti. Mikä on käänteisfunktion määrittelyjoukko?

   Vihje b-kohtaan: Käänteisfunktiolle ei voi kirjoittaa kaavaa ainakaan helposti.

3. a) Etsi jokin ratkaisu differentiaaliyhtälölle

$$x'(t) + x(t) = t^2 e^t \qquad \text{jossa } t \geq 0.$$

   Vihje: Käytä yritteenä funktiota $p(t)e^t$ jossa p on (mahdollisimman matala-asteinen) polynomi.

   b)Tarkastellaan massajousisysteemin differentiaaliyhtälöä

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0 \qquad \text{kun} \qquad t \geq 0.$$

   Etsi yhtälön ratkaisu alkuehdoilla $y(0) = 1$ ja $y'(0) = i$, missä $i^2 = -1$.

4. Etsi epähomogeenisen differentiaaliyhtälön $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^{\alpha t}$ yleinen ratkaisu, kun $\alpha \neq 1$ tai -3. Mitä tapahtuu yleisen ratkaisun lausekkeelle kun $\alpha \to 1$?

Jokeritehtävä: Jos koeaikaa on jäljellä, niin keksipä yksittäisratkaisu tehtävän 4. epähomogeeniselle yhtälölle tapauksessa $\alpha = 1$. Jokeritehtävästä voit saada tämän välikokeen pistemääräsi yhden lisäpisteen, mutta välikokeen maksimipistemäärä on silti 24p.

1.

$$\frac{\sin h}{\sqrt{x+h^p}-\sqrt{x}} = \frac{\sin h\left(\sqrt{x+h^p}+\sqrt{x}\right)}{x+h^p-x} = \frac{\sin h}{h^p}\cdot\left(\sqrt{x+h^p}+\sqrt{x}\right)$$

Jos $0<p<1$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h^p} = \underbrace{\lim_{h\to 0} h^{1-p}}_{=0}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}_{=1} = 0$$

ja

$$\lim_{h\to 0}\left(\sqrt{x+h^p}+\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x},$$

jolloin $L(x)=0$ $\forall\, x>0$. Tämä ei ole positiivinen reaaliluku.

Jos $p=1$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{h\to 0}\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x},$$

eli $\boxed{L(x)=2\sqrt{x}} > 0$.

Jos $p>1$, $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h^p} = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{p-1}}}_{=\infty}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}_{=1}$

ja $\lim_{h\to 0}\left(\sqrt{x+h^p}+\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} > 0$, eli $L(x)=\infty$.

Siis $p=1$ ja $L(x)=2\sqrt{x}$.

1.1

2. a) Ensinnäkin

$\pi + 1^2 + 1 \cdot \sin\pi = 1^3 + \pi$, joten annettu piste kuuluu implisiittisesti määritellylle käyrälle.

Oletetaan, että y voidaan ilmaista x:n funktiona annetun pisteen ympäristössä. Derivoidaan implisiittisesti yhtälöä

$$x + y(x)^2 + y(x)\sin x - y(x)^3 = \pi \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 2y(x)y'(x) + y'(x)\sin x + y(x)\cos x - 3y(x)^2 y'(x) = 0$$

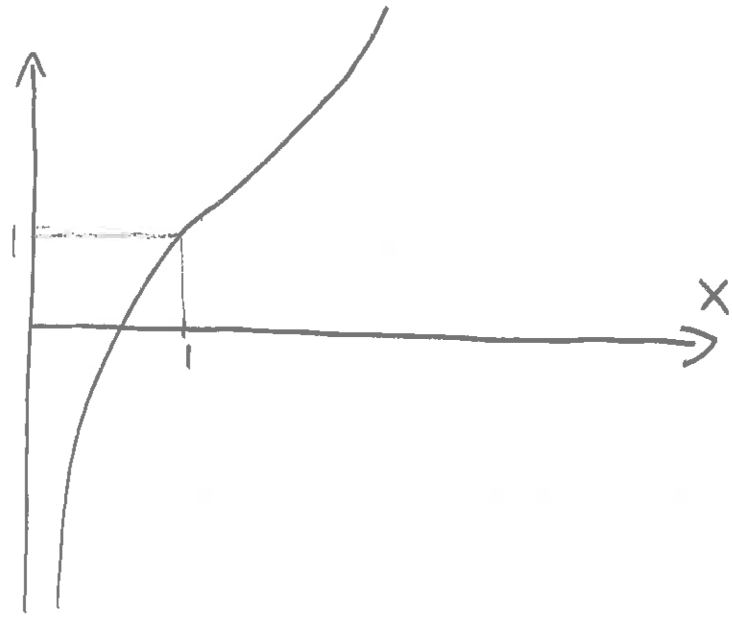
Sijoitetaan $x = \pi$ ja $y(x) = 1$, jolloin

$$1 + 2y'(\pi) + y'(\pi)\cdot 0 - 1 - 3y'(\pi) = -y'(\pi) = 0.$$

Siispä tangenttisuoran kulmakerroin on nolla, eli sen yhtälö on yksinkertaisesti $y = 1$.

2.1

2. b) $f(x) = \ln x + x^2$, $x > 0$



Käänteisfunktio on sellainen, että jos $f(x) = y$, niin $f^{-1}(y) = x$. Jotta tämä olisi hyvin määritelty, on funktion f oltava injektiivinen, eli kaksi eri pistettä eivät kuvaudu samaksi pisteeksi.

Tässä tapauksessa $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x > 0$, josta injektiivisyys seuraa, sillä jos olisi $f(a) = f(b)$, missä $b > a$, pitäisi väliarvolauseen nojalla löytyä piste $c \in [a,b]$, jossa $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$.

Tässä tapauksessa f^{-1} on olemassa ja sen määrittelyjoukko on f:n kuvajoukko, joka on $\mathbb{R}$, sillä $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ ja $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ja f on jatkuva.

2.2

3.1 a) $x' + x = t^2 e^t \quad , t \geq 0$

Yrite: $x(t) = (at^2 + bt + c)e^t$

$x'(t) = (2at + b)e^t + (at^2 + bt + c)e^t$

Nyt $x'(t) + x(t) = (2at^2 + (2a+2b)t + b + 2c)e^t = t^2 e^t$

Polynomien kertoimia vertailemalla saadaan

$$\begin{cases} 2a = 1 & \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ 2a + 2b = 0 & \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \\ b + 2c = 0 & \Rightarrow c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Siispä $x(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)e^t$ toteuttaa

annetun DY:n.

3.1

3. b) $y''+4y'+5y=0$

Yrite $y=e^{rt}$ johtaa karakteristiseen yhtälöön $r^2+4r+5=0 \Rightarrow r=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot5}}{2}$

$=-2\pm i$

Yleinen ratkaisu on siis

$$y(t)=e^{-2t}\left(A\sin t+B\cos t\right)$$

Vakiot A ja B saadaan kiinnitettyä alkuarvojen avulla:

$$\begin{cases} y(0)=B=1 \\ y'(0)=-2B+A=i \end{cases} \Rightarrow A=2+i$$

Ratkaisu on siis

$$\underline{y(t)=e^{-2t}\left((2+i)\sin t+\cos t\right)}$$

$$=e^{-2t}\left(\frac{2+i}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)\right)$$

$$\underline{=(1-i)e^{(-2-i)t}+i\,e^{(-2+i)t}}$$

kumpi tahansa kelpaa

3.2

$\boxed{4.}$ $y'' + 2y' - 3y = e^{\alpha t}$

Homogeeniyhtälön $y'' + 2y' - 3y = 0$ yleinen ratkaisu on $y_h(t) = Ae^{t} + Be^{-3t}$, sillä $(r-1)(r+3) = r^2 + 2r - 3$ on DY:n karakteristinen polynomi.

Kokeillaan yritettä $y_T(t) = Ce^{\alpha t}$ täydelliseen yhtälöön:

$$y_T'' + 2y_T' - 3y_T = (\alpha^2 + 2\alpha - 3)Ce^{\alpha t} = e^{\alpha t}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\alpha^2 + 2\alpha - 3}$$, kun $\alpha \neq 1$ ja $\alpha \neq -3$.

Siis

$$y(t) = Ae^{t} + Be^{-3t} + \frac{1}{\alpha^2 + 2\alpha - 3} e^{\alpha t}$$, kun $\alpha \neq 1$ ja $\alpha \neq -3$.

Jos $\alpha \to 1$ tai $\alpha \to -3$, termin $e^{\alpha t}$ kerroin $\to \infty$. Jos siis $\alpha = 1$ tai $\alpha = -3$, ei tämä yrite toimi.

$\boxed{\text{JOKERI}}$ Jos $\alpha = 1$, toimii yrite $y_T(t) = Cte^{t}$, sillä $y_T' = Ce^{t} + Cte^{t}$ ja $y_T'' = 2Ce^{t} + Cte^{t}$, joten $y_T'' + 2y_T' - 3y_T = 4Ce^{t} = e^{t}$, kun $C = \frac{1}{4}$. Yksittäisratkaisu on siis $y_T(t) = \frac{1}{4}te^{t}$.

$\boxed{4.1}$

Pisteytys:

1.
- Lavennus $(\sqrt{x+h^p}+\sqrt{x})$:llä $\Rightarrow$ 1 p.
- Hajotus osiin $\frac{\sin h}{h^p}$ ja $\sqrt{x+h^p}+\sqrt{x}$ ja raja-arvojen tarkastelu erikseen $\Rightarrow$ 3 p.
- Kaikki tapaukset $p\in(0,1)$, $p=1$, $p>1$ oikein $\Rightarrow$ 2 p.
- Vain oikea raja-arvo ja päättely $p=1$ $\Rightarrow$ 1p
- Jos osiinhajotelmassa tulee kämmi $\Rightarrow$ 2p tai 1p harkinnan mukaan

Oletus $\frac{\sin h}{h^p} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$ $\Rightarrow$ max. 3p tehtävästä

---

2. a)
- Implisiittisen derivoinnin idea $\Rightarrow$ 2 p.
- Muu $\Rightarrow$ 1 p.
- Jos ei totea pisteen olevan käyrällä, ei sakota

b)
- f^{-1}:n olemassaolon perustelu $\Rightarrow$ 2 p.
- määrittelyjoukko $\Rightarrow$ 1 p.
- toteaminen f aidosti kasvava $\Rightarrow \exists f^{-1}$ $\Rightarrow$ 0p
- derivaatta väärä $\Rightarrow$ -1p

---

3. a)
- Yritteellä ratkaisun idea & sijoitus DY:öön $\Rightarrow$ 2p
- Muu $\Rightarrow$ 1 p. 1. asteen yrite ~1-2p

b)
- Yleinen ratkaisu $\Rightarrow$ 2p.
- Vakioiden ratkaisu $\Rightarrow$ 1 p.
- Pienehköt laskuvirheet $\Rightarrow$ ei sakkoa

4.
- Homogeeniyhtälön ratkaisu $\Rightarrow$ 2 p
- Täydellisen yhtälön yksittäisratkaisu yritteellä $\Rightarrow$ 2 p
- Täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu $\Rightarrow$ 1 p
- $\alpha \to 1$ tarkastelu $\Rightarrow$ 1 p
- yritteessä ei vakiota eli ei muotoa $C_1 e^{\alpha t}$ vaan $e^{\alpha t}$ $\Rightarrow$ ~ 3 p tehtävästä
- ei yritettä keksittynä ~ 2 p – " –