Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopiston Teknillinen korkeakoulu

Malinen, Aalto

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

1. välikoe 12.10.2009

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa EI saa käyttää mitään sähköllä toimivia apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. a) Määritä kompleksilukujen $z = 2 + 2i$ ja $w = -3e^{i\frac{\pi}{4}}$ trigonometriset muodot (siis muoto $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ jossa $r > 0$) ja laske niiden avulla $\bar{z}\bar{w}$ ja $\bar{z}/\bar{w}$.

   b) Mille kompleksitason pisteille $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, on voimassa yhtälö
$$\operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0?$$

2. a) Tarkastellaan yhtälösysteemiä
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_3 &= -1 \\ 6x_1 - sx_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 - 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$
   jossa $s \in \mathbb{C}$. Millä s:n arvo(i)lla yhtälösysteemin ratkaisu on yksikäsitteinen? Ratkaise tällöin yhtälöryhmästä muuttuja x_2 vaikkapa Cramerin säännöllä.

   b) Määritä matriisin
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 12 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$
   käänteismatriisi Gaussin algoritmin avulla.

3. Tarkastellaan yhtälöryhmää
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$
   Voidaanko parametrit α, β ja γ valita siten, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua? Mikä on yhtälöryhmän kerroinmatriisin rangi (englanniksi "rank")?

4. Määritellään matriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}$ parametrin reaaliarvoilla $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Laske matriisin A ominaisarvot ja -vektorit kun $\alpha \neq 1$.

   b) Diagonalisoi matriisi A kun $\alpha \neq 1$; toisin sanoen, etsi kääntyvä 2×2-matriisi P ja 2×2-diagonaalimatriisi D jotka toteuttavat $A = PDP^{-1}$.

   Laske potenssi A^n positiivisille kokonaisluvuille n. Mitä tapahtuu matriiseille A^n ja P kun parametri α lähestyy lukua 1?

1a) a)

$$z = 2+2i = \sqrt{2^2+2^2}\, e^{i \arctan \frac{2}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$w = -3e^{i\frac{\pi}{4}} = 3 \cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 3e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$= 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

Jos lopputuloksessa —, siitä vähennetään 1 piste.

$$\overline{z}\,\overline{w} = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot 3e^{-i\frac{5\pi}{4}} = 6\sqrt{2}\underbrace{e^{-i\frac{6\pi}{4}}}_{=i} = 6\sqrt{2}\, i$$

$$\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} e^{-i\frac{\pi}{4} - \left(-i\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\underbrace{e^{i\pi}}_{-1} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

a-kohta 3 pistettä.

Vähennyksiä: — merkki w:n polaariesityksessä

- liittoluvun käsite epäselvä
- pahempi laskuvirhe tai useampi pienempi

b) Merkitään $z = x + yi$ ja lasketaan

$$\operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(x + yi + \frac{1}{x+yi}\right) = \operatorname{Im}\left(x+yi + \frac{x-yi}{x^2+y^2}\right)$$

$$= y - \frac{y}{x^2+y^2} = 0 \qquad (*)$$

Reaaliakselin pisteet $(y=0)$ toteuttavat yhtälön. Jos $y \neq 0$ voidaan se jakaa pois, eli

$$1 - \frac{1}{x^2+y^2} = 0 \iff x^2+y^2 = 1.$$

Annetun ehdon toteuttavat siis reaaliakselin ja yksikköympyrän pisteet.

---

b-kohta: 3 pistettä:

- Jakolasku $\frac{1}{x+yi}$ $\Rightarrow$ 1 p.
- Jos (*) on oikein $\Rightarrow$ 1 p.
- Loppu $\Rightarrow$ 1 p.

2. a) 3 yhtälöä ja 3 muuttujaa, eli yksikäsitteinen ratkaisu löytyy täsmälleen silloin, kun kerroinmatriisin determinantti $\neq 0$.

Lasketaan siis

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 6 & -5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(-5\cdot 0 - (-3)\cdot 1\right) - 3\left(6\cdot(-3) - (-2)(-5)\right)$$

$$= 6 - 3(-18 - 2s) = 60 + 6s = 0, \text{ kun } s = -10.$$

Jos $s \neq -10$, saadaan x_2 vaikkapa Cramerin säännöllä:

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{60+6s} = \frac{-2\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{60+6s}$$

$$= \frac{-2\cdot 2 - 2\cdot 20}{60+6s} = \frac{-44}{60+6s} = \underline{\underline{-\frac{22}{30+3s}}}$$

2.1

b)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ei voida Gaussata ennen tuentaa, koska ratkaisevilla paikoilla on nollia. Vaihdellaan siis rivien järjestystä.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :10 \\ :200 \\ :9 \\ :12 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{200} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tämä on haluttu käänteismatriisi

a-kohta 3 p.	b-kohta 3 p.
• 2 p. sin ratkaisusta	• Tuennan idea 2 p.
• 1 p. x_2:in ratkaisu	• muu 1 p.

2.2

3. Yksi mahdollisuus on Gaussata yhtälöryhmä:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & \alpha \\ 1 & -1 & -2 & 2 & \beta \\ 3 & 2 & -1 & 1 & \gamma \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 - \frac{r_1}{2} \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 - r_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & \alpha \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \beta - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma - \beta - \alpha \end{array}\right) \quad (*)$$

Jotta ratkaisu olisi olemassa, on oltava $\gamma = \alpha + \beta$. Jos näin on, on ratkaisu olemassa, koska jäljelle jäävässä <u>kahden</u> yhtälön ryhmässä on <u>kaksi</u> tukialkiota.

Rangi on lineaarisesti riippumattomien sarakkeiden/rivien lukumäärä, tässä siis 2 (tukialkioiden lkm).

Vähennyksiä: - Muodosta (*) ei osata päätellä, että ratkaisua ei ole, jos $\gamma \neq \alpha + \beta$, vähennys <u>2 p.</u>
- Laskuvirheet

3

4. a) Ominaisarvot ovat diagonaalialkiot $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = \alpha$, sillä kyseessä on alakolmiomatriisi.

Laksetaan ominaisvektorit ratkaisemalla

$$(A - \underset{1}{\underset{\uparrow}{\lambda_1}} I)V_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha^2 & \alpha - 1 \end{bmatrix} V_1 = 0$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

ja

$$(A - \underset{\alpha}{\underset{\uparrow}{\lambda_2}} I)V_2 = 0 \iff \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 \\ -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} V_2 = 0$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a-kohta 2p.
- o.-arvot 1p.
- o.-vektorit 1p.

---

b) $A = PDP^{-1}$ on ominaisarvohajotelma,

eli $P = (V_1 \mid V_2) = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 \\ \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$

ja $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

Diagonalisointi 2p.

$$P^{-1} = \frac{1}{\alpha - 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha^2 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

4.1

Lasketaan A^n diagonalisoitua muotoa käyttäen, jolloin $A^n = PD^nP^{-1}$

$$= \frac{1}{\alpha-1}\begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 \\ \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha^2 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\alpha-1}\begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 \\ \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha^{n+2} & \alpha^n(\alpha-1) \end{pmatrix}$$

Tämä muoto viittää 1p.

$$= \frac{1}{\alpha-1}\begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 \\ \alpha^2-\alpha^{n+2} & \alpha^n(\alpha-1) \end{pmatrix}$$

$$\alpha^2-\alpha^{n+2}$$
$$= \alpha^2(1-\alpha^n)$$
$$= \alpha^2(1-\alpha)(1+\alpha+\dots+\alpha^{n-1})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha^2-\alpha^3-\dots-\alpha^{n+1} & \alpha^n \end{pmatrix}$$

Kun $\alpha \to 1$, lähestyy P matriisia $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, joka ei ole kääntyvä.

Laskettu kaava A^n:lle toimii kuitenkin, ja $A^n \xrightarrow[\alpha \to 1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$

Loppu 1p.

4.2