Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Malinen – Aalto

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

3. välikoe 16.12.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa EI saa käyttää mitään sähköllä toimivia apuvälineitä paitsi sydämentahdistimia. Koeaika on 3h.

1. a) Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

   b) Laske joko l'Hospitalin säännöllä tai Taylorin polynomilla raja-arvo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1-x)}.$$

2. Atomipommi on räjähtänyt stratosfäärissä Otaniemen yläpuolella, ja teekkarikylän viheliäisinkin tamagochi on iäksi vaiennut. Jok'ikinen laskukone on mennyttä, ja logaritmitaulut ynnä laskutikut ovat maailmaa kiertävässä *Tikusta Asiaa* -näyttelyssä Ulaanbaatarissa, Mongoliassa. Eloonjäämisemme riippuu sangen omituisella tavalla siitä, pystymmekö laskemaan luvun $a = \ln 3$ likiarvon noin sadasosan tarkkuudella.

   Pelasta meidät soveltamalla funktioon $f(x) = \ln(e+x)$ lineaarista approksimaatiota, ja laske täten likiarvo luvulle $a = \ln 3$. Tarkista lineaarisen approksimaation virhekaavalla (eli Lagrangen jäännöstermin lausekkeella 1. asteen Taylorin polynomille), että approksimaatiovirhe on haluttua suuruusluokkaa.

   Vihje: Joku desantti oli kirjoittanut TKK:n päärakennuksen miestenvessan seinään likiarvon

$$1/e = 0.3678794411171442\ldots$$

   josta on laskennassa suurta helpotusta.

3. a) Laske määrämättömät integraalit (eli "antiderivaatat")

$$\int \frac{2x+1}{x^2+6x+10}dx \quad \text{ja} \quad \int \frac{5-x}{2x^2+x-10}dx.$$

   b) Laske osittaisintegroimalla

$$\int_0^1 x^2e^x\,dx\,.$$

4. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehtävä $x'(t) - 9x(t) = \sin 2t$, $x(0) = 0$.

   Vihje: Tarvittavia Laplace-muunnoskaavoja koepaperin kääntöpuolella.

Funktio $f(t), t \geq 0$	**Laplace-muunnos** $\hat{f}(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$ kun $s > 0$
e^{ax}	$\dfrac{1}{s-a}$ kun $s > \max(0, a)$
$\sin bx; \quad b \in \mathbb{R}$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$ kun $s > 0$
$\cos bx; \quad b \in \mathbb{R}$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$ kun $s > 0$
$x^n; \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ kun $s > 0$
$x^n e^{ax}; \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ kun $s > \max(0, a)$
$e^{ax} \sin bx; \quad a, b \in \mathbb{R}$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$ kun $s > 0$
$e^{ax} \cos bx; \quad a, b \in \mathbb{R}$	$\dfrac{x-a}{(s-a)^2+b^2}$ kun $s > 0.$

1. a)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) = \exp\Big(\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)-\ln x}{x^2}}_{=A}\Big)$$

(*)

exp-funktio on jatkuva

$$A \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x} \quad \left(=\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{4x\sin x+2x^2\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{4\sin x+2x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{4\cos x+2\cos x-2x\sin x} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

a-kohta: 4 p

* 1 p siitä, että saa lausekkeen sellaiseen muotoon että voi soveltaa l'Hôpitalin sääntöä

- 1 p l'Hôpitalin säännön muistamisesta
- 2 p laskusta

---

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1-x)} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{-\frac{1}{1-x}} = -1$$

b-kohta: 2 p

vähennyksiä virheistä

Taylor: $\frac{x}{\ln(1-x)} = \frac{x}{-x+O(x^2)} = \frac{1}{-1+O(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} -1$

2.

funktion f approksimaatio pisteen $x=0$ ympäristössä on

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(t), \text{ missä } t \in [0, x], \text{ jos } x \geq 0$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x+e) = \frac{1}{x+e}$$

$$= \frac{1}{e}, \text{ kun } x=0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+e}\right) = -\frac{1}{(x+e)^2}$$

Tehtävän funktiolle

$$\ln(e+x) = \underbrace{\ln e + \frac{x}{e}}_{\text{lin. approksimaatio}} \underbrace{- \frac{x^2}{2(e+t)^2}}_{\text{virhe}}, \quad \text{missä } t \in [0, x]$$

- lin. approksimaation muodostaminen 2p.
- lasku 2 p edellyttäen oikean vastauksen
- virhearvio 2 p

$$\begin{cases} \ln e = 1 \\ x = 3 - e \end{cases}$$

Nyt lineaarinen approksimaatio antaa:

$$\ln 3 \approx 1 + \frac{3-e}{e} = \frac{3}{e}$$

Suoritetaan kertominen allekkain:

$$\begin{array}{r} 0,367879 \\ \cdot \quad 3 \\ \hline 1,103637 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\ln 3 \approx 1,10}}$$

Tiedetään, että $e > 2,7$, joten $x < 0,3$.

virheelle pätee: $\left|\frac{x^2}{2(e+t)^2}\right| < \frac{0,3^2}{2 \cdot e^2} < \frac{0,09}{2 \cdot 6} < 0,01$

$e > 2,5 \Rightarrow e^2 > 6,25 > 6$

3. a)

$$\int \frac{2x+1}{x^2+6x+10}\,dx = \int \frac{2x+1}{(x+3)^2+1}\,dx \qquad \left|\ \begin{array}{l} u = x+3 \Leftrightarrow x = u-3 \\ du = dx \end{array}\right.$$

$$= \int \frac{2(u-3)+1}{u^2+1}\,du = \int \left(\frac{2u}{u^2+1} - \frac{5}{u^2+1}\right) du = \underline{\underline{\ln(u^2+1) - 5\arctan u}}$$

$$\int \frac{5-x}{2x^2+x-10}\,dx = \int \frac{5-x}{(2x+5)(x-2)}\,dx$$

Nimittäjän nollakohdat

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-10)}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm 9}{4}$$

$x = -\frac{5}{2}$ tai $x = 2$

Tehdään osamurtokehitelmä:

$$\frac{5-x}{(2x+5)(x-2)} = \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+2B)x - 2A + 5B}{(2x+5)(x-2)}$$

$$\begin{cases} A + 2B = -1 \\ -2A + 5B = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{5}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\cancel{-B = 3 \Rightarrow B = -3} \quad \cancel{A = -2B - 1 = 5}$

$$\int \frac{5-x}{2x^2+x-10}\,dx = \int \left(\frac{-5/3}{2x+5} + \frac{1/3}{x-2}\right) dx = -\frac{5}{6}\ln|2x+5| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + C$$

---

b) $\int_0^1 x^2e^x\,dx = \Big/_0^1 x^2e^x - \int_0^1 2xe^x\,dx = e - \Big/_0^1 2xe^x + \int_0^1 2e^x\,dx = e - 2e + \Big/_0^1 2e^x = e - 2$

---

2 p/ integraali. paino menetelmien osaamisessa
siis a-kohta 4 p, b-kohta 2 p.

4.1 Derivaatan Laplace-muunnos

$$\widehat{x'}(s) = \int_0^\infty e^{-st} x'(t)\,dt = \Big/_0^\infty e^{-st} x(t) - \int_0^\infty -s e^{-st} x(t)\,dt$$

$$= -x(0) + s\hat{x}(s)$$

Laplace-muunnetaan DY:n molemmat puolet:

$$s\hat{x}(s) - x(0) - 9\hat{x}(s) = \frac{2}{s^2+4} \qquad \Big|\ x(0) = 0$$

$$(s-9)\hat{x}(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

osamurtokehitelmä

$$\hat{x}(s) = \frac{2}{(s^2+4)(s-9)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{C}{s-9}$$

Tämän muodostamisesta 3 p.

$$= \frac{(As+B)(s-9) + C(s^2+4)}{(s^2+4)(s-9)} = \frac{(A+C)s^2 + (-9A+B)s - 9B + 4C}{(s^2+4)(s-9)}$$

$$A + C = 0 \Rightarrow A = -C$$

$$-9A + B = 0 \Rightarrow \begin{cases} 9C + B = 0 \\ 4C - 9B = 2 \end{cases}$$

$$-9B + 4C = 2$$

$$85C = 2 \Rightarrow C = \frac{2}{85}$$

$$A = -\frac{2}{85}$$

Osamurtokehitelmä 1 p.

$$B = 9A = -\frac{18}{85}$$

4.1

$$\hat{X}(s) = -\frac{2}{85}\,\frac{s}{s^2+4} - \frac{9}{85}\cdot\frac{2}{s^2+4} + \frac{2}{85}\cdot\frac{1}{s-9}$$

Tämä osataan käänteismuuntaa annetuilla kaavoilla:

$$x(t) = -\frac{2}{85}\cos(2t) - \frac{9}{85}\sin(2t) + \frac{2}{85}e^{9t}$$

Tarkistus:

$$x'(t) = \frac{4}{85}\sin(2t) - \frac{18}{85}\cos(2t) + \frac{18}{85}e^{9t}$$

$$x'(t) - 9x(t) = \sin(2t) \quad \text{ja} \quad x(0) = 0$$

OK

Käänteismuunnos 2 p.

14.2