Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Malinen – Aalto

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

2. välikoe 17.11.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ⋆-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa EI saa käyttää mitään sähköllä toimivia apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. a) Määritä raja-arvo $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{\sqrt{x+5h}-\sqrt{x}}$ kun $x > 0$.

   b) Perustele jatkuvan funktion väliarvo-ominaisuuden eli "Bolzanon merkinvaihtolauseen" (the intermediate value theorem) avulla, että yhtälöllä

   $$e^x \sin x^3 = a$$

   on vähintään yksi ratkaisu $x > 2008$ kaikilla parametrin arvoilla $a \in \mathbb{R}$.

   Vihje b-kohtaan: Piirtäminen kannattaa aina.

2. a) Etsi käyrän $x + y^2 + y\sin x = y^3 + \pi$ tangentin yhtälö pisteessä $(x, y) = (\pi, 1)$.

   b) Määritellään funktio $f(x) = \sin^2 x + x^2$ määrittelyjoukossa $x \geq 0$. Perustele miksi f:llä on käänteisfunktio. Piirrä myös kuvaaja. Mikä on tämän käänteisfunktion määrittelyjoukko?

   Vihje b-kohtaan: Käänteisfunktiolle ei voi kirjoittaa kaavaa ainakaan helposti.

3. a) Etsi jokin ratkaisu differentiaaliyhtälölle

   $$x'(t) + x(t) = t\sin t \quad \text{jossa } t \geq 0.$$

   Vihje: Käytä yritteenä funktiota $p(t)\cos t + q(t)\sin t$ jossa p ja q ovat polynomeja.

   b) Ratkaise alkuarvotehtävä

   $$y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = i, \quad y'(0) = 0.$$

4. Etsi epähomogeenisen differentiaaliyhtälön $y''(t) + 2y'(t) - 2y(t) = e^{t+1}$ yleinen ratkaisu.

Mallivastaukset

1. a)

$$\frac{\sin h}{\sqrt{x+5h}-\sqrt{x}} = \frac{\sin h\,(\sqrt{x+5h}+\sqrt{x})}{x+5h-x}$$

$$= \frac{1}{5}\underbrace{(\sqrt{x+5h}+\sqrt{x})}_{\to 2\sqrt{x},\ \text{kun } h\to 0}\ \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1,\ \text{kun } h\to 0} \longrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{5},\ \text{kun } h\to 0$$

a)-kohta 3p.

b) Voidaan valita piste $x_0 > 2008$ s.e. $e^{x_0} > |a|$, koska $e^x \to \infty$ kun $x \to \infty$. $f(x) = e^x \sin(x^2)$

Valitaan $x_1 > x_0$ s.e. $x_1^3 = 2\pi m - \frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{N}$

ja x_2 s.e. $x_2^3 = 2\pi m + \frac{\pi}{2}$ (eli $x_2 > x_1 > x_0$)

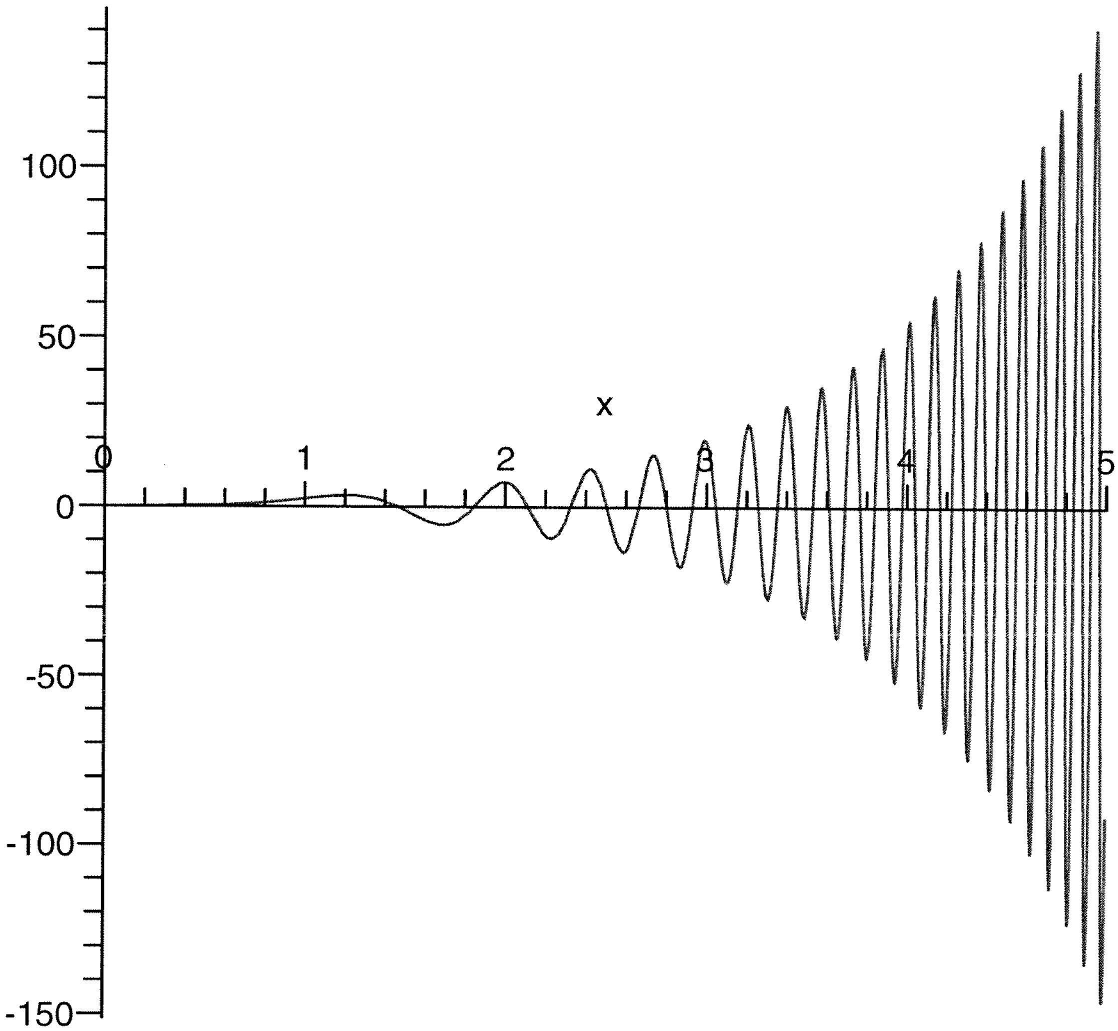
$$f(x_1) = \underbrace{e^{x_1}}_{>|a|}\ \underbrace{\sin(x_1^3)}_{=-1} < -|a| \quad \text{ja} \quad f(x_2) = \underbrace{e^{x_2}}_{>|a|}\ \underbrace{\sin(x_2^3)}_{=1} > |a|$$

Väliarvolause: Koska $f(x)$ on jatkuva ja $f(x_1) < -|a|$ ja $f(x_2) > |a|$, löytyy $\hat{x} \in (x_1, x_2) \subset (2008, \infty)$ s.e. $f(\hat{x}) = a$

b)-kohta 3p

Kuva $\longrightarrow$

> $plot(e^{x} \cdot \sin(x^{3}), x = 0..5)$



>

1.2

2.] a) Tarkistetaan, kuuluuko annettu piste $(x,y)=(\pi,1)$ implisiittisesti määritellylle käyrälle $x+y^2+y\sin x = y^3+\pi$ (1)

sijoitetaan:

$\pi+1^2+1\cdot\sin\pi = \pi+1 = 1^3+\pi$ toteutuu!

Derivoidaan implisiittisesti yhtälöä (1), eli oletetaan $y=y(x)$:

$$1+2yy'+y'\sin x+y\cos x = 3y^2y'$$

$$y' = \frac{-1-y\cos x}{2y+\sin x-3y^2} \quad \Big| \text{ sij. } (x,y)=(\pi,1)$$

$$= \frac{-1-1\cdot\cos\pi}{2\cdot1+\sin\pi-3\cdot1^2} = \frac{0}{-1} = 0$$

Tangentti on suora, joka kulkee pisteen $(\pi,1)$ kautta ja jonka kulmakerroin on 0.

Tämän suoran yhtälö on $y=1$.

---

a-kohta: 3 pistettä
- implisiittinen derivointi
  - idea 1 p.
  - suoritus 1 p.
- tangentin yhtälö 1 p.

2.1

$\boxed{2.b}$ $f(x) = \sin^2 x + x^2$, $x \geq 0$

$f'(x) = \underbrace{2\sin x \cos x}_{=\sin(2x)} + 2x > 0$, kun $x > 0$,

sillä $2\sin x \cos x = \sin(2x) > 0$ ja $2x > 0$,

kun $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ja kun $x \geq \frac{\pi}{2}$,

$2x \geq \pi$ ja $|2\sin x \cos x| \leq 2$ (itseasiassa ≤ 1).

Monotonisella funktiolla on käänteisfunktio, jonka määrittelyjoukko on f:n arvojoukko.

$f(0) = 0$ ja $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$, joten jatkuvana aidosti kasvavana f:n arvojoukko on $[0, \infty)$.

Kuva →

kuvaa enemmän painotusta kuin pisteytystä.

---

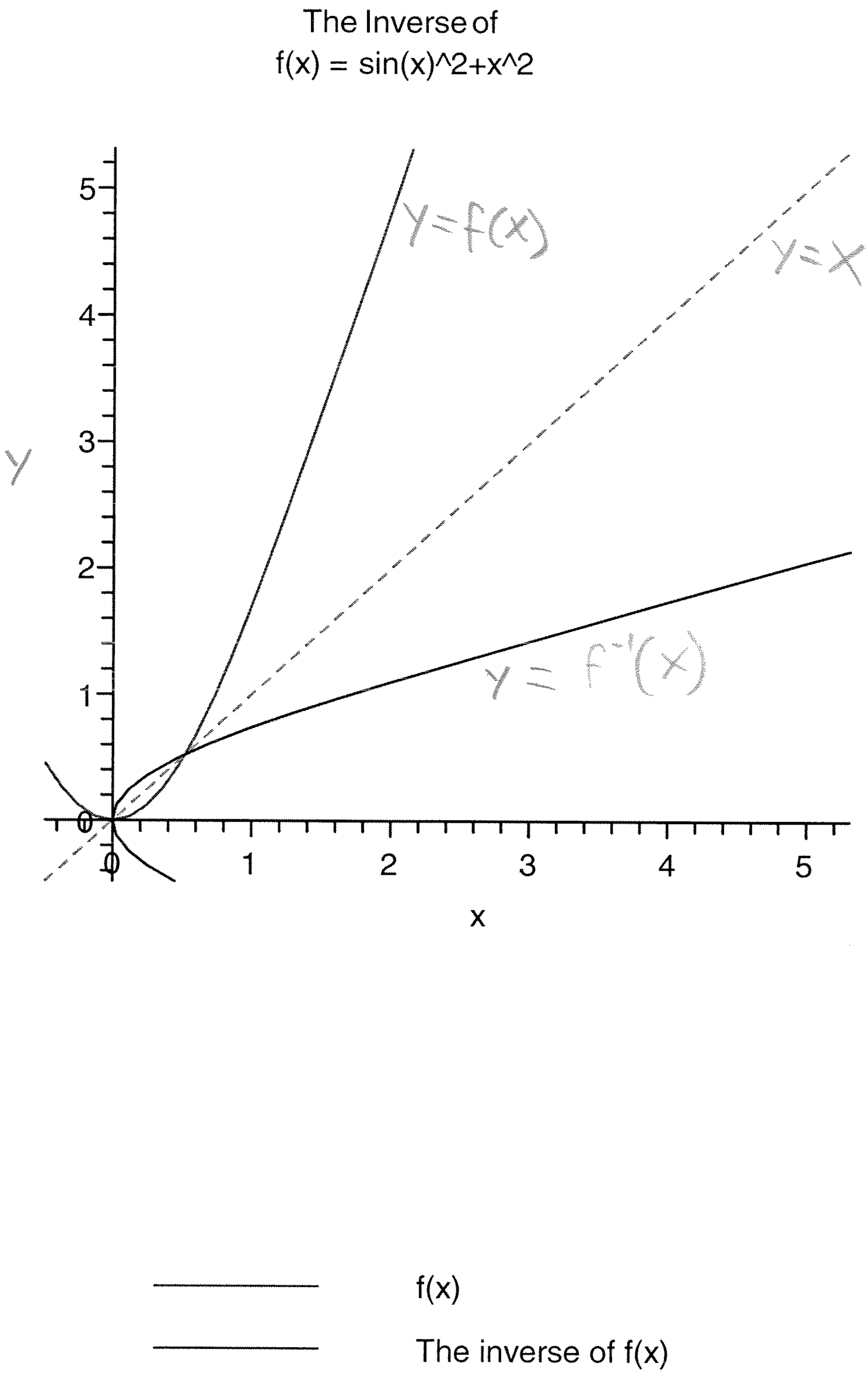
b-kohta: 3 pistettä

- miksi käänteisfunktio olemassa 1,5 p
- määrittelyjoukko 1 p.
- kuva 0,5 p

$\boxed{2.2}$

> $with(Student[Calculus1])$:

> $InversePlot(\ (\sin(x))^2 + x^2, x = 0\,..2)$



>

2.3

3. a) $x'(t)+x(t)=t\sin t \quad , \quad t\geqslant 0$

Yrite: $x(t)=p(t)\cos t+q(t)\sin t$

$$x'(t)+x(t)=p'(t)\cos t-p(t)\sin t+q'(t)\sin t+q(t)\cos t$$
$$+p(t)\cos t+q(t)\sin t$$

$$=\big(p'(t)+q(t)+p(t)\big)\cos t+\big(-p(t)+q'(t)+q(t)\big)\sin t$$

$$=t\sin t$$

Saadaan dy-ryhmä $\begin{cases} p'(t)+q(t)+p(t)=0 \\ -p(t)+q'(t)+q(t)=t \end{cases}$

Nyt alemmasta yhtälöstä saadaan $p(t)=q'(t)+q(t)-t$

$$\Rightarrow p'(t)=q''(t)+q'(t)-1$$

sij ylempään

$$\Longrightarrow q''(t)+q'(t)-1+q(t)+q'(t)+q(t)-t=0$$

$$\Longleftrightarrow q''(t)+2q'(t)+2q(t)=t+1$$

Meitä kiinnostaa jokin polynomiratkaisu, eli unohdetaan homogeeninen yhtälö ja tehdään yrite

$q(t)=at+b \quad , \quad q'(t)=a \quad , \quad q''(t)=0$

$$2a+2at+2b=t+1 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{2} \ , \ b=0$$

$\Longrightarrow q(t)=\frac{t}{2}$, josta saadaan $p(t)=q'(t)+q(t)-t$
$=\frac{1}{2}+\frac{t}{2}-t=-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}$ $\boxed{3.}$

eli $x(t) = \left(-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)\cos t + \frac{t}{2}\sin t.$

a-kohta:
3 pistettä
- yritteen idea 1 p.
- suoritus 2p.

Tarkistus:

$$x'(t)+x(t) = -\frac{1}{2}\cos t - \left(-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{t}{2}\cos t$$

$$+\left(-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)\cos t + \frac{t}{2}\sin t = t\sin t$$

ok.

---

b)

$$y''-2y'+2y=0 \quad , y(0)=i \quad , y'(0)=0$$

Yrite $y(t)=e^{rt}$ johtaa karakteristiseen yhtälöön $r^2-2r+2=0 \Rightarrow r=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=1\pm i.$

Konjugaattiparin tapauksessa voidaan ratkaisu kirjoittaa muodossa $y(t)=e^t(A\sin t+B\cos t)$

Nyt $y'(t)=e^t(A\sin t+B\cos t+A\cos t-B\sin t)$

Alkuehdoista saadaan

$y = C_1 e^{(1+i)x} + C_2 e^{(1-i)x}$

$$\begin{cases} y(0)=B=i \\ y'(0)=A+B=0 \quad \Rightarrow A=-i \end{cases}$$

b-kohta:
3 pistettä

$$\Rightarrow \underline{y(t)=i\,e^t(\cos t-\sin t)}$$

3.2

$\boxed{4.}$ $y''(t) + 2y'(t) - 2y(t) = e^{t+1} \quad (= e \cdot e^t)$

Ratkaistaan ensin homogeeninen yhtälö $y''+2y'-2y=0$ yritteellä $y = e^{rt}$, joka jälleen johtaa karakteristiseen yhtälöön $r^2+2r-2=0$

$$\Rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(-2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y_{HY}(t) = C_1 e^{(-1+\sqrt{3})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{3})t}$$

Eksponenttifunktiomuotoiseen kuormaan puree samanmuotoinen yrite, eli $y_P = Ae^t$, etenkin, kun e^t ei ole HY:n ratkaisu. (Muuten yritettäisiin $y_P(t) = P(t)e^t$, missä $P(t)$ on polynomi).

$$y_P'' + 2y_P' - 2y_P = Ae^t = e \cdot e^t \Rightarrow A = e$$

$\Rightarrow$ Yleinen ratkaisu epähomogeeniselle yhtälölle on löydetyn erikoisratkaisun ja HY:n yleisen ratkaisun summa

$$y(t) = y_{HY}(t) + y_P(t) = e^{t+1} + C_1 e^{(-1+\sqrt{3})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{3})t}.$$

- HY:n ratkaisu 2 p.
- TY:n ratkaisuyrite 1 p.
- Yritteen sijoitus ja lasku 1 p.
- Yl. ratkaisu = HY:n ratkaisu + erikoisratkaisu 2 p.

$\boxed{4.}$