Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu
Malinen, Aalto

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

1. välikoe 13.10.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa EI saa käyttää mitään sähköllä toimivia apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. a) Määritä kompleksilukujen $z = 2 + 2i$ ja $w = -3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ polaariesitykset (siis muoto $re^{i\theta}$ jossa $r > 0$) ja laske niiden avulla $\bar{z}\bar{w}$ ja $\bar{z}/\bar{w}$.

   b) Mitä käyriä esittävät kompleksitason joukot

$$A = \{z \in \mathbb{C} : Re(z^2) = 1\} \quad \text{ja} \quad B = \{z \in \mathbb{C} : Im(z^2) = -1\}?$$

   Mikä on näiden joukkojen leikkaus $A \cap B$?
   Vihje: Kirjoita $z = x + iy$ jossa $x, y \in \mathbb{R}$.

2. a) Ratkaise x_1 yhtälösysteemistä

$$\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\
&6x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\
&-2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0
\end{aligned}$$

   Cramerin säännön avulla.

   b) Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

   käänteismatriisi Gaussin algoritmin avulla.

3. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

   Voidaanko parametrit α, β ja γ valita siten, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua? Mikä on yhtälöryhmän kerroinmatriisin rangi (englanniksi "rank")?

4. Määritellään matriisi $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix}$ parametrin arvoilla $\alpha \geq 0$.

   a) Laske matriisin A ominaisarvot ja -vektorit kun $\alpha \geq 0$.

   b) Diagonalisoi matriisi A kun $\alpha > 0$; toisin sanoen, etsi kääntyvä 2×2-matriisi P ja 2×2-diagonaalimatriisi D jotka toteuttavat $A = PDP^{-1}$. Laske diagonalisoinnin avulla potenssi A^n positiivisille kokonaisluvuille n. Mitä tapahtuu matriiseille A^n ja P kun parametri α lähestyy nollaa?

1. a)

$$Z = 2+2i = \sqrt{2^2+2^2}\, e^{i \arctan \frac{2}{2}}$$
$$= 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$w = -3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 3\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

Jos lopputuloksessa $-$, siitä vähennetään 1 piste.

$$\bar{Z}\,\bar{W} = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot 3 e^{-i\frac{5\pi}{4}} = 6\sqrt{2}\, \underbrace{e^{-i\frac{6\pi}{4}}}_{=i} = 6\sqrt{2}\, i$$

$$\frac{\bar{Z}}{\bar{W}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} e^{-i\frac{\pi}{4} - \left(-i\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{3} e^{i\pi} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

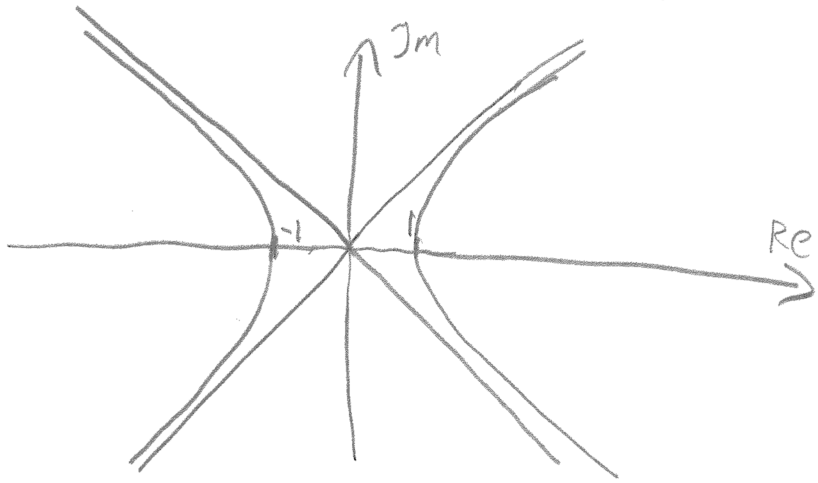
a-kohta 3 pistettä.

Vähennyksiä: — merkki w:n polaariesityksessä
- liittoluvun käsite epäselvä
- pahempi laskuvirhe tai useampi pienempi

1. b) Merkitään $z = a + bi$

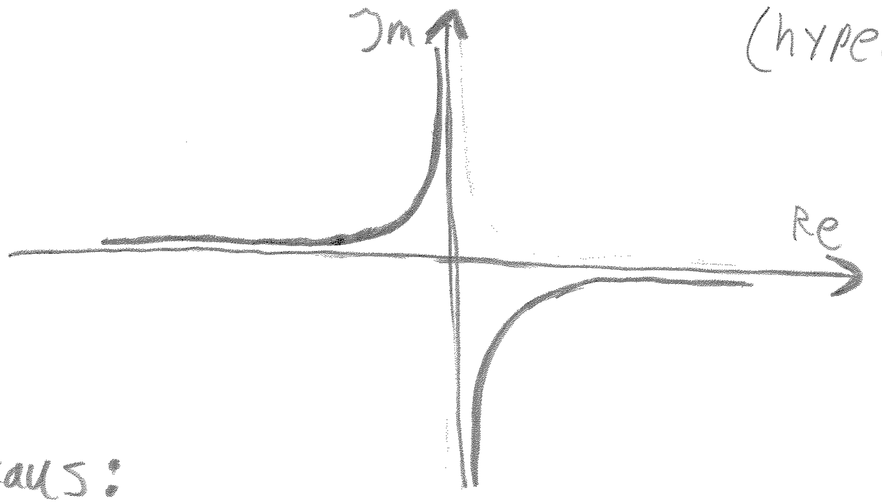
$\mathrm{Re}(z^2) = a^2 - b^2 = 1$ (*)

$\Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z)^2 - \mathrm{Im}(z)^2 = 1$ (hyperbeli)



$\mathrm{Im}(z^2) = 2ab = -1 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) = -\dfrac{1}{2\mathrm{Re}(z)}$

(hyperbeli)



Leikkaus:

Sijoitetaan (*):een $b = -\dfrac{1}{2a}$

$\Rightarrow a^2 - \dfrac{1}{4a^2} = 1 \Longleftrightarrow a^4 - a^2 - \dfrac{1}{4} = 0$

$\Rightarrow a^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-\frac{1}{4})}}{2} = \dfrac{1 \overset{+}{(-)} \sqrt{2}}{2}$, a^2 oltava ≥ 0. 1.

$$a = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \quad b = -\frac{1}{2a} = \mp\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}},$$

eli $A \cap B = \left\{ \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - \frac{i}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \right\}$

---

b-kohta: 3 pistettä

A: 1 piste

B: 1 piste

$A \cap B$: 1 piste

Jos on otettu mukaan vaihtoehto

$a^2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ (<0) ja väärin

laskemalla saatu neljä leikkauspistettä, vähennetään piste.

1.3

2. a)

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{-\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}}{2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{-12}{-4-96+20} = \frac{-12}{-80} = \frac{3}{20}$$

---

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r_3 \leftarrow r_3 + 2r_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 \leftarrow r_1 + \frac{r_3}{4} \\ r_2 \leftarrow r_2 - \frac{r_4}{2} \end{matrix}$$

2.1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad r_3 \leftarrow \frac{r_3}{-4}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Tarkistus:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OK

a-kohta: 3 p

b-kohta: 3 p

Väärästä ideasta rankaistaan enemmän, laskuvirheistä vähemmän tai ei ollenkaan.

2.2

3. Yksi mahdollisuus on Gaussata yhtälöryhmä:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & \alpha \\ 1 & -1 & -2 & 2 & \beta \\ 3 & 2 & -1 & 1 & \gamma \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 - \frac{r_1}{2} \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 - r_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & \alpha \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \beta - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma - \beta - \alpha \end{array}\right) \quad (*)$$

Jotta ratkaisu olisi olemassa, on oltava $\gamma = \alpha + \beta$. Jos näin on, on ratkaisu olemassa, koska jäljelle jäävässä kahden yhtälön ryhmässä on kaksi tukialkiota.

Rangi on lineaarisesti riippumattomien sarakkeiden/rivien lukumäärä, tässä siis 2 (tukialkioiden lkm).

Vähennyksiä: – Muodosta (*) ei osata päätellä, että ratkaisua ei ole, jos $\gamma \neq \alpha + \beta$, vähennys 2 p.

– Laskuvirheet

3.1

4. a) Ominaisarvot ovat karakteristisen polynomin juuret.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \alpha^2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \alpha^2$$

$\iff$ Ominaisarvot ovat $\lambda_1 = \alpha i$ ja $\lambda_2 = -\alpha i$

Ominaisvektorit:

$\lambda_1 = \alpha i$:

$$(\lambda_1 I - A)X_1 = \begin{pmatrix} \alpha i & -1 \\ \alpha^2 & \alpha i \end{pmatrix} X_1 = 0$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha i \end{pmatrix} \quad \text{(esimerkiksi)}$$

$\lambda_2 = -\alpha i$: $(\lambda_2 I - A)X_2 = \begin{pmatrix} -\alpha i & -1 \\ \alpha^2 & -\alpha i \end{pmatrix} X_2 = 0$

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha i \end{pmatrix} \quad \text{(esimerkiksi)}$$

---

a-kohta: 3 pistettä:

- Ominaisarvojen & -vektorien käsite (1
- O-arvot laskettu oikein tai tiedetty miten lasketaan (1
- O-vektorit — " — (1p)

4. b)

$$A = PDP^{-1} \iff AP = PD$$

Tästä seuraa, että diagonalisointi on käytännössä ominaisarvohajotelma, eli

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha i & 0 \\ 0 & -\alpha i \end{pmatrix}$$

ja

$$P = (X_1 \mid X_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha i & \alpha i \end{pmatrix}.$$

Tarkastetaan laskemalla AP ja PD:

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha i & \alpha i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha i & \alpha i \\ -\alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha i & \alpha i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha i & 0 \\ 0 & -\alpha i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha i & \alpha i \\ -\alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

eli $AP = PD$.

$$P^{-1} = \frac{1}{2\alpha i} \begin{pmatrix} \alpha i & 1 \\ -\alpha i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\alpha} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2\alpha} \end{pmatrix}$$

(Tarvitaan myöhemmin)

$$A^n = P D \underbrace{P^{-1} P}_{I} D P^{-1} \cdots P D P^{-1} = P D^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha i & \alpha i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha i)^n & 0 \\ 0 & (-\alpha i)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\alpha} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha i & \alpha i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha i)^n & -\frac{i}{2\alpha}(\alpha i)^n \\ -\frac{1}{2}(-\alpha i)^n & -\frac{i}{2\alpha}(-\alpha i)^n \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}(-\alpha i)^{n-1} + \frac{1}{2}(\alpha i)^{n-1}$

$-\frac{1}{2i\alpha} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha i)^n + \frac{1}{2}(-\alpha i)^n & \frac{i}{2\alpha}\left((-\alpha i)^n - (\alpha i)^n\right) \\ \frac{1}{2}\left((\alpha i)^{n+1} + (-\alpha i)^{n+1}\right) & \frac{1}{2}\left((\alpha i)^n + (-\alpha i)^n\right) \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \alpha^n & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \alpha^n \end{pmatrix}, & n \text{ parillinen} \\[2ex] \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}} \alpha^{n-1} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \alpha^{n+1} & 0 \end{pmatrix}, & n \text{ pariton} \end{cases}$$

4.3

Kun α lähestyy nollaa,

P lähestyy matriisia $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (riippuen ominais-vektorien valinnasta)

joka on singulaarinen $\left(\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\right)$.

Kaava A^n:lle kuitenkin toimii yhä

n parillinen: $A^n \to 0$, kun $\alpha \to 0$

n pariton $(\neq 1)$: $A^n \to 0$, kun $\alpha \to 0$

$n = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\frac{1-1}{2}}\alpha^{1-1} \\ (-1)^{\frac{1+1}{2}}\alpha^{1+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\alpha \to 0]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

b-kohta 3 pistettä:

- diagonalisointi 1 p

- A^n:n kaava (1 p) (Muoto (*) riittää ainakin)
- $\alpha \to 0$ -tarkastelu (1 p)

4.4