S1 1. välikokeen malliratkaisut 2006

1. (a) Määritä lukujen $z = 2 + 2i$ ja $w = -3e^{i\pi/4}$ polaariesitykset (siis muoto $re^{i\theta}$ jossa $r > 0$) ja laske niiden avulla $\bar{z}\bar{w}$ ja $\bar{z}/\bar{w}$.

   (b) Mitä käyriä esittävät kompleksitason joukot

$$A = \{z \in \mathbb{C} : Re(z^2) = 1\} \quad \text{ja} \quad B = \{z \in \mathbb{C} : Im(z^2) = -1\}$$

   ? Mikä on näiden joukkojen leikkaus $A \cap B$?

   Ratkaisu:

   (a) $z = 2 + 2i$, jolloin $|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ ja $\arg(z) = \arctan(2/2) = \pi/4$. Tällöin $z = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Vastaavasti $w = -3e^{i\pi/4} = e^{i\pi} \cdot 3e^{i\pi/4} = 3e^{i5\pi/4} = 3e^{-i3\pi/4}$. Nyt saadaan $\bar{z}\bar{w} = 6\sqrt{2}e^{i(-\pi/4+3\pi/4)} = 6\sqrt{2}i$ ja $\bar{z}/\bar{w} = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4} \cdot \frac{1}{3}e^{-i3\pi/4} = -2\sqrt{2}/3$.

   (b) Olkoon $z = x + yi$, missä $x, y \in \mathbb{R}$. Nyt $z^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i$, joten $Re(z^2) = x^2 - y^2 = 1$ ja $Im(z^2) = 2xy = -1$ ja joukot A ja B esittävät hyperbelejä, joiden asymptootit ovat vastaavasti suorat $y = \pm x$ ja suorat $x = 0$, $y = 0$.

   Leikkaus $A \cap B$ on niiden kompleksilukujen $z = x + yi$ joukko, jotka toteuttavat molemmat yhtälöt: sijoittamalla $2xy = -1$ eli $y = -\frac{1}{2x}$ (koska $x \neq 0$) yhtälöön $x^2 - y^2 = 1$ saadaan toisen asteen yhtälö x^2:lle $x^4 - x^2 - \frac{1}{4} = 0$. Siis $x^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Näistä miinusmerkkinen ei kuitenkaan kelpaa, koska reaaliluvun neliö ei voi olla negatiivinen, eli $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$. Edelleen $y = -\frac{1}{2x} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}$.
   Siis $A \cap B = \{z_1, z_2\}$, missä

$$z_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}i \approx 1.0987 - 0.4551i$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}i \approx -1.0987 + 0.4551i$$

2. a) Määritä vektoreiden $(1, 2, -1, 1)$, $(3, 6, -9, 1)$ ja $(2, 4, -5, 1)$ virittämän vektoriavaruuden dimensio ja määritä jokin kanta tälle vektoriavaruudelle käyttäen Gaussin algoritmia.

   b)

Ratkaise x_1 yhtälösysteemistä

$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ &6x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ &-2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{aligned}$$

Cramerin säännön avulla.

Ratkaisu: (a) Ensimmäinen tapa: Muodostetaan ensin annetuista vektoreista matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \end{bmatrix},$$

jossa siis annetut vektorit ovat vaakavektoreina. Gaussin algoritmilla saadaan

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 - 3r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1 \end{matrix} \\ \sim &\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 - \frac{1}{2}r_2 \end{matrix} \\ \sim &\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Näin ollen matriisin A rangi on 2 eli annettujen vektoreiden virittämän vektoriavaruuden dimensio on 2, ja porrasmuotoisen matriisin vaakavektorit $(1, 2, -1, 1)$ ja $(0, 0, -6, -2)$ muodostavat annettujen vektoreiden virittämän avaruuden kannan.

Toinen tapa: Muodostetaan matriisi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -9 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

missä siis vektorit ovat pystyvektoreina. Gaussin algoritmin avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -9 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_1 \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \to r_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 - \frac{1}{3}r_2 \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Porrasmuotoisessa matriisissa tukialkiot ovat sarakkeilla 1 ja 2, jolloin voidaan valita vastaavat vektorit $(1, 2, -1, 1)$ ja $(3, 6, -9, 1)$ kantavektoreiksi, ja vektoriavaruuden dimensio on siis 2.

(b)

Cramerin säännön avulla saadaan

$$
x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 5 \end{bmatrix}},
$$

missä siis osoittajassa kerroinmatriisin 1. sarake (kun lasketaan x_1) on korvattu yhtälösysteemin oikealla puolella olevalla pystyvektorilla. Käyttämällä kehityskaavoja saadaan

$$
\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \\
&\quad + (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -15 + 3 = -12,
\end{aligned}
$$

missä siis kehitettiin determinanttia 1. sarakkeen mukaan, koska sillä oli 2 nollaa. Toisaalta

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 5 \end{bmatrix} &= (-1)^{1+1}\cdot 2\cdot\det\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 3\cdot\det\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+3}\cdot(-1)\cdot\det\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= 2\cdot(-5+3) - 3\cdot(30+2) - 1\cdot(-18-2) = -80.\end{aligned}$$

Näin ollen $x_1 = \frac{-12}{-80} = \frac{3}{20}$.

3. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Voidaanko parametrit α, β ja γ valita siten, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua? Mikä on yhtälöryhmän kerroinmatriisin rangi (englanniksi “rank”)?

Ratkaisu:

Gaussittamalla saadaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 & \alpha \\ 1 & -1 & -2 & 2 & \beta \\ 3 & 2 & -1 & 1 & \gamma \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 & -3 & 3\alpha \\ 0 & -5 & -5 & 5 & 2\beta-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\gamma-2\beta-2\alpha \end{bmatrix}.$$

Tästä nähdään, että kerroinmatriisin rangi on kaksi (tukialkioita 6 ja -5) ja että valitsemalla $\gamma \neq \alpha+\beta$ yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

4. a)

Laske $A^6 = AAAAAA$ diagonalisoimalla A, kun

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

b) Neliömatriisi A olkoon kääntyvä (eli säännöllinen, eli käänteismatriisi A^{-1} on olemassa). Olkoon λ matriisin A ominaisarvo ja $\mathbf{x} \neq 0$ sitä vastaava ominaisvektori. Osoita että $\lambda \neq 0$. Osoita että käänteismatriisin A^{-1} eräs ominaisarvo on $1/\lambda$, ja sitä vastaava ominaisvektori on $\mathbf{x}$.

Ratkaisu:

(a)

Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

karakteristinen yhtälö on $0 = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 4)(\lambda - 1)$, josta ominaisarvot $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 4$. Näitä vastaavat ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$, josta ominaisvektorit $\mathbf{v}_1 = (-2, 3)^T$ ja $\mathbf{v}_2 = (1, 0)^T$. Muodostetaan matriisit $V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ ja $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ eli

$$V = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, V^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pätee $A = V\Lambda V^{-1}$, josta

$$A^6 = V\Lambda^6 V^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^6 & 0 \\ 0 & 4^6 \end{bmatrix} \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4096 & 2730 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

Jos olisi $\lambda = 0$, niin $0 = \det(A - \lambda I) = \det(A)$, jolloin A ei olisi säännöllinen, eli $\lambda \neq 0$. Yhtälöstä $Ax = \lambda x$ seuraa kertomalla vasemmalta A^{-1} :llä ja jakamalla yhtälö λ :lla yhtälö $A^{-1}x = (1/\lambda)x$, josta väite seuraa.