Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Malinen – Sirviö

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

2. välikokeen malliratkaisu 14.11.2005

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. a) Määritä $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ja $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, kun

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2+3x^4}}\,, x \in \mathbb{R}.$$

b) Osoita jatkuvan funktion väliarvo-ominaisuuden eli "Bolzanon merkinvaihtolauseen" (the intermediate value theorem) avulla, että yhtälöllä

$$x^3 - 5x + 3 = 0$$

on kolme erisuurta reaalista juurta.

Ratkaisu:

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{\sqrt{2+3x^4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x^4}+3}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{0+3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{kun } x \to \infty. \\ f'(x) &= \frac{2x\sqrt{2+3x^4} - \frac{x^2 12x^3}{2\sqrt{2+3x^4}}}{2+3x^4} = \frac{4x}{(2+3x^4)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{x^{8/3}} \frac{4}{(\frac{2}{x^4}+3)^{3/2}} \longrightarrow 0\frac{4}{\sqrt{27}} = 0,\ \text{kun } x \to \infty. \end{aligned}$$

b) Merkitään $p(x) = x^3 - 5x + 3$. Kokeilemalla löydetään pisteet

$$\begin{aligned} x &= -3, \quad p(-3) = -9 \\ x &= 0, \quad p(0) = 3 \\ x &= 1, \quad p(1) = -1 \\ x &= 2, \quad p(2) = 1 \end{aligned}$$

Bolzanon merkinvaihtolauseen perusteella funktiolla $p(x)$ on nollakohta avoimilla ("pistevierailla") väleillä $(-3, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1, 2)$. Algebran peruslauseen nojalla kolmannen asteen polynomilla ei voi olla sen enempää nollakohtia, joskaan tätä ei kysytty.

---

2. a) Etsi yhtälön $\frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^3 = 2$ kuvaaman käyrän $y = y(x)$ tangentin yhtälö pisteessä $(x, y) = (-1, -1)$.

b) Määritellään funktio $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ määrittelyjoukossa $x \geq e$. Perustele miksi f:llä on käänteisfunktio. Mikä on tämän käänteisfunktion määrittelyjoukko?

Vihje: Käänteisfunktiolle ei voi kirjoittaa kaavaa ainakaan helposti.

Ratkaisu:

a) Tangentin kulmakerroin on yhtälön $\frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow xy^2 + x^3 - 2y^3 = 0$ määrittelemän funktion derivaatta (pisteissä joissa $y(x) \neq 0$). Implisiittiderivoinnilla saadaan

$$y^2 + 2xyy' + 3x^2 - 6y^2y' = 0 \text{ eli } y' = -\frac{3x^2 + y^2}{2xy - 6y^2}.$$

Pisteessä $(x, y) = (-1, -1)$ saadaan $y'(-1) = \frac{3+1}{2-6} = 1$. Tangentin yhtälö: $y - (-1) = 1 \cdot (x - (-1))$ eli sievemmin $y = x$.

b) Funktiolla $f(x)$ on käänteisfunktio, koska se on aidosti vähenevä välillä $[e, \infty)$. Tämä nähdään osoittamalla derivaatta negatiiviseksi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}(1 - \ln x) < 0 \text{ kun } x \geq e,$$

koska $\ln x > 1$ kaikilla $x > e$. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $(0, \frac{1}{e}]$.

---

3. a) Etsi jokin ratkaisu differentiaaliyhtälölle

$$x'(t) + ax(t) = t^2.$$

Vihje: Keksi sopiva yrite.

b) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' - 3y' - 10y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

Ratkaisu:

a) Polynomit voivat olla vain polynomien derivaattoja, joten ja yhtälöstä $x'(t) + ax(t) = t^2$ nähdään polynomiratkaisun voivan olla vain astetta 2.

Yrite $x(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ derivoidaan $x'(t) = 2\alpha t + \beta t$, joka sijoittamalla yhtälöön $x'(t) + ax(t) = t^2$ antaa $a\alpha t^2 + (2\alpha + a\beta)t + (\beta + a\gamma) = t^2$. Tämä toteutuu kaikilla t vain jos $a\alpha = 1$, $2\alpha + a\beta = 0$ ja $\beta + a\gamma = 0$. Ratkaisemalla α, β ja γ saadaan yritteen kertoimiksi $\alpha = \frac{1}{a}$, $\beta = -\frac{2}{a^2}$ ja $\gamma = \frac{2}{a^3}$.

b) Karakteristinen yhtälö $\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$, josta saadaan 2. asteen yhtälön ratkaisukaavalla $\lambda_1 = 5$ ja $\lambda_2 = -2$. Tämän homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu derivaattoineen on siis

$$y_Y(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-2t}, \quad y_Y'(t) = 5C_1 e^{5t} - 2C_2 e^{-2t}.$$

Vaatimalla alkuehdot $y_Y(0) = 3$ ja $y_Y'(0) = 1$ saadaan yhtälöpari $C_1 + C_2 = 3$, $5C_1 - 2C_2 = 1$, jonka ratkaisu on $C_1 = 1$ ja $C_2 = 2$. Vaaditut alkuehdot toteuttava yksityisratkaisu on siis $y(t) = e^{5t} + 2e^{-2t}$.

---

4. Etsi epähomogeenisen differentiaaliyhtälön $y'' + 6y' + 9y = 5 \sin t$ yleinen ratkaisu.

Ratkaisu:

Yhtälön yleinen ratkaisu saadaan vastaavan homogeeniyhtälön $y'' + 6y' + 9y = 0$ yleisen ratkaisun $x_h(t)$ ja epähomogeenisen yhtälön mielivaltaisen yksityisratkaisun $y_p(t)$ summana. Karakteristisella polynomilla on kaksinkertainen juuri $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, joten homogeeniyhtälölle tulee kirjoittaa

$$y_h(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}.$$

Yksityisratkaisua etsitään yritteellä

$$\begin{aligned} y_p(t) &= A\sin t + B\cos t, \\ y_p'(t) &= -B\sin t + A\cos t, \\ y_p''(t) &= -A\sin t - B\cos t, \end{aligned}$$

ja saadaan $y_p'' + 6y_p' + 9y_p = (-A - 6B + 9A)\sin t + (-B + 6A + 9B)\cos t = 5\sin t$. Jälkimmäinen yhtäsuuruus toteutuu kaikilla t vain jos $-A - 6B + 9A = 8A - 6B = 5$ ja $6A + 8B = 0$, eli $A = 2/5$ ja $B = -3/10$.

Nyt voidaan kirjoittaa epähomogeenisen yhtälön yleiselle ratkaisulle lauseke

$$y_Y(C_1, C_2; t) = C_1e^{-3t} + C_2te^{-3t} + \frac{2}{5}\sin t - \frac{3}{10}\cos t.$$