Tehtävä 1

a)

$\frac{h}{\sqrt{x+5h}-\sqrt{x}} = \frac{h(\sqrt{x+5h}+\sqrt{x})}{5h} \to \frac{2}{5}\sqrt{x}$ kun $h \to 0$.

b)

Nyt $f(x) = x^3 - 5x + 3$, ja lasketaan $f(-3) = -9 < 0$, $f(0) = 3 > 0$,$f(1) = -1 < 0$ ja $f(2) = 1 > 0$, jolloin nollakohdat väleillä $(-3, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1, 2)$.

Tehtävä 2

a)

Derivoidaan implisiittisesti yhtälöä $x\sin(xy - y^2) = x^2 - 1$ ja saadaan $x(xy' + y - 2yy')\cos(xy - y^2) + \sin(xy - y^2) = 2x$, josta sijoittamalla $x = 1$ ja $y = 1$ saadaan $y'(1) = -1$ ja kun tangentti kulkee pisteen $(1, 1)$ kautta saadaan sen yhtälöksi $y = 2 - x$.

b)

Funktio $f(x) = x(x^2 + 1)^{-1/2}$ on määritelty ja derivoituva koko reaaliakselilla ja sen derivaatta on $f'(x) = (x^2 + 1)^{-1/3} > 0$ eli f aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio. Käänteisfunktion lauseke saadaan yhtälöstä

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = y$$

ratkaisemalla x y :n avulla(nähdään myös, että x ja y samanmerkkisiä) eli saadaan $\sqrt{x^2 + 1} = x/y$, josta saadaan $x^2 = y^2(x^2 + 1)$ ja siis $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = f^{-1}(y)$, jossa $-1 < y < 1$.

Tehtävä 3

a)

Yritteellä e^{rt} karakteristinen polynomi $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2$ jolla kaksinkertainen juuri $r = 2$. Tällöin yhtälön yleinen ratkaisu on $y(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t}$.

b)

Karakterinen polynomi $r^2 - 3r - 10 = (r + 2)(r - 5)$, jolla juuret -2 ja 5, josta yleinen ratkaisu $y(t) = Ae^{-2t} + Be^{5t}$. Alkuarvotehtävän ratkaisu saadaan määrittämällä kertoimet A ja B yhtälöparista $3 = y(0) = A + B$, $1 = y'(0) = -2A + 5B$, joista $A = 2$, $B = 1$ ja alkuarvotehtävän ratkaisuksi saadaan $y(t) = 2e^{-2t} + e^{5t}$.

Tehtävä 4

a)

Merkataan $y' = v$, jolloin 2. asteen yhtälö $y'' + 5y' + 6y$ saadaan palautettua 1. asteen yhtälösysteemiksi $v' + 5v + 6y = 0$, $y' - v = 0$, joka on matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}$$

Matriisin A ominaisarvot saadaan polynomin $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$ nollakohtina, ja huomataan, että sijoituksella $y = e^{\lambda t}$ alkuperäiseen 2. asteen yhtälöön päädytään samaan polynomiin eli kyseessä on karakteristinen polynomi. Polynomin nollakohdat ovat $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$.

b)

Vakioidenvariointikaavasta $x(t) = e^{-2t}x_0 + \int_0^t e^{2(v-t)} f(v)\mathrm{d}v$, jossa $x_0 = 0$ ja $f(v) = 1$, kun $t \in [0,1]$ ja $f(v) = 0$, kun $t > 1$. Integroinnin jälkeen saadaan tulos $x(t) = (1 - e^{-2t})/2$, kun $t \in [0,1]$ ja $x(t) = (e^{2(1-t)} - e^{-2t})/2$, kun $t > 1$.