Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Arponen/Salin

Mat-1.421 Peruskurssi S1

3. välikoe 11.12.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. (a) Ratkaise likimääräisesti yhtälö $x^3+2x-1=0$ Newtonin menetelmällä siten, että virhe on korkeintaan 10^{-4}. Perustele tarkkuus. Käytä alkuarvona $x_0 = 1$.

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = x^3 + 2x - 1$, jolloin $f'(x) = 3x^2 + 2$. Newtonin menetelmä: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Iteroimalla:

$$x_1 = 0.6; x_2 \approx 0.464935064; x_3 \approx 0.453467173; x_4 \approx 0.453397654; x_5 \approx 0.453397651.$$

Nähdään, että $f(x_5) = -1.351 \times 10^{-9} < 0$ ja $f(x_5 + 10^{-4}) = 2.6168308 \times 10^{-4} > 0$. Joten merkinvaihtolauseen ($f(x)$ on jatkuva funktio) nojalla $f(x)$:n nollakohta on välillä $(x_5, x_5 + 10^{-4})$, ja x_5 kelpaa ratkaisuksi halutulla tarkkuudella.

(b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{8x^2 - \sin(x^2)}.$$

Ratkaisu: Käyttämällä funktioiden e^x, $\sin(x)$ ja $\cos(x)$ Taylor-sarjoja saadaan

$$\frac{\cos(x) - e^{x^2}}{8x^2 - \sin(x^2)} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) - 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)}{8x^2 - x^2 + \frac{x^6}{6} + O(x^{10})} = \frac{-\frac{3x^2}{2} + O(x^4)}{7x^2 + O(x^6)}.$$

Joten raja-arvoksi saadaan

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{8x^2 - \sin(x^2)} = -\tfrac{3}{14}.$$

2. (a) Laske osittaisintegroimalla

$$\int x \sin(2x) dx.$$

Ratkaisu: Osittaisintegroimalla

$$\int x\sin(2x)dx = x \cdot \big(-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\big) + \tfrac{1}{2}\int \cos(2x)dx = -\tfrac{x}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

(b) Ratkaise separoimalla integraaliyhtälö

$$y(x) = 7 - \int_0^x ty(t)dt.$$

Ratkaisu: Muutetaan ensin derivoimalla differentiaaliyhtälöksi $y'(x) = -xy(x)$. Lisäksi $y(0) = 7$. Separointi:

$$\int_7^{y(x)} \frac{dy}{y} = \int_0^x -x dx.$$

Josta integroimalla $\ln(\frac{|y(x)|}{7}) = -\frac{x^2}{2}$. Ratkaisu on $y(x) = 7 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

3. (a) Laske numeerisesti integraali

$$\int_0^{3\pi/2} \sin\left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$$

käyttämällä Simpsonin sääntöä $n = 4$ osavälillä.

Ratkaisu: Simpson: $S_4 = \frac{h}{3}\big(f(0) + 4f(\frac{3\pi}{8}) + 2f(\frac{6\pi}{8}) + 4f(\frac{9\pi}{8}) + f(\frac{12\pi}{8})\big)$, missä $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ ja $h = \frac{3\pi}{8}$. Laskemalla saadaan $S_4 = 3.036844$.

(b) Tarkastellaan tasoa, joka kulkee pisteen $(1, 2, 3)$ kautta, ja jonka virittävät vektorit $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ja $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Mikä on tason normaalivektori? Määritä tason yhtälö muodossa $Ax + By + Cz + D = 0$.

Ratkaisu: Normaalivektori on

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Koska taso kulkee pisteen $(1, 2, 3)$ kautta, niin $2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - D = 0$. Joten $D = -15$, ja kysytty tason yhtälö on $2x - 4y - 3z + 15 = 0$.

4. Olkoon annettu parametrisoitu käyrä $x = \sin(t^3)$, $y = \cos(t^3)$, $t \in [0, \frac{1}{2}(2\pi)^{1/3}]$.

(a) Määritä käyrän pituus.

Ratkaisu: Nähdään, että $x^2 + y^2 = \sin(t^3)^2 + \cos(t^3)^2 = 1$. Joten kyseessä on ympyrän kaari. Koska , $t \in [0, \frac{1}{2}(2\pi)^{1/3}]$, niin suurimmaksi kulman arvoksi saadaan $\left(\frac{1}{2}(2\pi)^{1/3}\right)^3 = \frac{\pi}{4}$. Koska ympyrän säde on 1, niin käyrän pituus on $\frac{\pi}{4}$.

Voi myös laskea integroimalla

$$l = \int_0^{\frac{1}{2}(2\pi)^{1/3}} \sqrt{(\tfrac{dx}{dt})^2 + (\tfrac{dy}{dt})^2 dt} = \int_0^{\frac{1}{2}(2\pi)^{1/3}} 3t^2 dt = \tfrac{\pi}{4}.$$

(b) Määritä pyörähdyskappaleen pinta-ala, kun käyrä pyörähtää $x-$akselin ympäri.

Ratkaisu: Pyörähdyspinnan ala

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}(2\pi)^{1/3}} 2\pi x(t)\sqrt{(\tfrac{dx}{dt})^2 + (\tfrac{dy}{dt})^2 dt} = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}(2\pi)^{1/3}} \sin(t^3)\sqrt{9t^4} dt = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}(2\pi)^{1/3}} \sin(t^3) 3t^2 dt.$$

Sijoittamalla $u = t^3$, jolloin

$$A = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(u)du = \sqrt{2}\pi(\sqrt{2} - 1).$$