TKK, Matematiikan laitos Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti 6.4.2002

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Olkoon $z = 3 + \mathrm{i}4$. Kirjoita kompleksiluku $\dfrac{\overline{z} - 1}{z + 1}$ muodossa $a + \mathrm{i}b$.

(b) Olkoon $w = 3 - \mathrm{i}$. Määritä yhtälön $\mathrm{e}^z = w$ kaikki ratkaisut, eli määritä kaikki funktion $\ln(w)$ arvot.

Ratkaisu: (a) Jos $z = 3 + \mathrm{i}4$ niin

$$\frac{\overline{z} - 1}{z + 1} = \frac{3 - \mathrm{i}4 - 1}{3 + \mathrm{i}4 + 1} = \frac{(2 - \mathrm{i}4)(4 - \mathrm{i}4)}{(4 + \mathrm{i}4)(4 - \mathrm{i}4)} = \frac{8 - \mathrm{i}8 - \mathrm{i}16 - 16}{16 + 16} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{i}.$$

(b) Kompleksiluvun w itseisarvo on $|w| = \sqrt{3^2 + 1^2} = 3.1623$, ja w:n argumentti on $\arctan(\frac{-1}{3}) = -0.32175$. Jos $z = a + \mathrm{i}b$ niin $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^a$ ja $\arg(\mathrm{e}^z) = b$, joten jos nyt $\mathrm{e}^z = w$ niin $\mathrm{e}^a = 3.1623$ ja $b = -0.32175 + 2\pi n$ missä n on kokonaisluku. Tästä seuraa, että $a = \ln(3.1623) = 1.1513$ jolloin haetut ratkaisut ovat

$$z = 1.1513 + \mathrm{i}(-0.32175 + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

---

2. Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi Gaussin algoritmin avulla.

Ratkaisu: Gaussin algoritmin avulla saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r_3 \leftarrow r_3 + \tfrac{5}{3}r_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -2 & \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 \leftarrow r_1 - 3r_3 \\ r_2 \leftarrow r_2 - 6r_3 \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -2 & \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 \leftarrow r_1 - \frac{4}{3}r_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -2 & \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow \frac{1}{3}r_1 \\ r_3 \leftarrow \frac{3}{2}r_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Tästä päätellään, että käänteismatriisi on

$$\begin{bmatrix} -9 & 7 & 5 \\ 4 & -3 & -2 \\ -3 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

---

3. Määritä polynomi p siten, että $|t\sin(2t) - p(t)| \leq 10^{-2}$ kun $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.

Ratkaisu: Taylorin kehitelmän mukaan

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} f^{(j)}(0)\frac{x^j}{j!} + f^{(k+1)}(s)\frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

joten jos $f(x) = \sin(x)$ ja $k = 2n$ niin

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cos(s)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Koska $|cos(s)| \leq 1$ niin

$$\left| t\sin(2t) - t\left(2t - \frac{(2t)^3}{3!} + \frac{(2t)^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2t)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)\right| \leq t\frac{(2t)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Koska virheen pitäisi olla korkeintaan 10^{-2} kun $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ on valittava luku n siten, että

$$\frac{1}{2}\frac{(2\frac{1}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq 10^{-2},$$

eli

$$\frac{1}{2(2n+1)!} \le 10^{-2}.$$

Kokeilemalla todetaan, että $n = 2$ on sopiva luku. Näin ollen $p(t) = 2t^2 - \frac{4}{3}t^3$.

4.

(a) Laske funktion f Fourier-kertoimet $\hat{f}(n) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt} f(t)\,\mathrm{d}t$ kun $f(t) = 1+t$, $t \in [0,1)$ ja $f(t+1) = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) Määritä integraalin $\int_0^2 \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ likiarvo käyttäen suunnikasmenetelmää ja 4 yhtä pitkää osaväliä.

Ratkaisu: (a) Lasketaan ensin

$$\hat{f}(0) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi 0t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1+t)\,\mathrm{d}t = \Big/_0^1 \left(t + \tfrac{1}{2}t^2\right) = \frac{3}{2}.$$

Jos $n \neq 0$ niin saadaan osittaisintegroinnilla

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt}(1+t)\,\mathrm{d}t = \Big/_0^1 \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt}(1+t) + \int_0^1 \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt} 1\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi n}(2-1) + \Big/_0^1 \frac{1}{-(\mathrm{i}2\pi n)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt} = \frac{\mathrm{i}}{2\pi n}.$$

(b)Nyt $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = 0.5$ joten suunnikasmenetelmän mukaisesti lasketaan

$$T_4 = \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\Big),$$

missä $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ ja $x_j = 0 + j \cdot 0.5$, $j = 0, 1, \ldots, 4$. Silloin saadaan

$$T_4 = \frac{0.5}{2}\Big(1 + 2 \cdot 1.0607 + 2 \cdot 1.4142 + 2 \cdot 2.0917 + 3\Big) = 3.2833.$$

5.

(a) Laske vektoreiden $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ristitulo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

(b) Määritä (korkeintaan) 2-asteinen polynomi p, joka toteuttaa ehdot $p(-1) = 5$, $p(0) = 2$ ja $p(2) = 8$, käyttäen Newtonin interpolointikaavaa. (Ellet osaa käyttää Newtonin interpolointikaavaa, niin määritä tämä polynomi jollain toisella tavalla.) Laske tämän polynomin arvo pisteessä 1.

Ratkaisu: (a)

$$(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ (-1) & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ (-1) & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ (-1) & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - \mathbf{j}(1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1))$$

$$+ \mathbf{k}(1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

(b) Jaetut erotukset lasketaan seuraavan kaavion avulla:

$$
\begin{array}{cccc}
x_i & f[x_i] & f[x_i, x_j] & f[x_i, x_j, x_k] \\
-1 & 5 & & \\
 & & -3 & \\
0 & 2 & & 2 \\
 & & 3 & \\
2 & 8 & &
\end{array}
$$

Haettu polynomi on siis

$$p(x) = 5 - 3(x+1) + 2(x+1)(x+0),$$

eli

$$p(x) = 2x^2 - x + 2.$$

Tämän polynomin arvo annetussa pisteessä on $p(1) = 3$.
