

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !  
Funktioalaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!*

Välkikoe 1: Tehtävistä 1-4 on valittava 3.  
Välkikoe 2: Tehtävistä 5-8 on valittava 3.  
Välkikoe 3: Tehtävistä 9-12 on valittava 3.  
Tentti: Tehtävistä 1, 2, 5, 8, 10 ja 12 on valittava 5.

1.

- (a) Esitä kompleksiluku  $\frac{2-\bar{w}}{-2+w}$  muodossa  $a + ib$  kun  $w = 3 - i$ .  
(b) Määritä joukon  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$  kuva kuvauksessa  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ .

*Ratkaisu:* (a) Koska  $\bar{w} = \overline{3-i} = 3+i$  niin

$$\frac{2-\bar{w}}{-2+w} = \frac{2-3-i}{-2+3-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{1+1} = \frac{-1-i2+1}{2} = -i.$$

(b) Joukon  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$  reuna on reaaliakseli  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}$  joten lasketaan funktion  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$  arvot esimerkiksi pisteissä  $z = -1$ ,  $z = 0$  ja  $z = 1$ . Tämän lisäksi on syytä laskea funktion  $f$  arvo myös esimerkiksi pisteessä  $x = -i$ . Nyt saadaan

$z$	$f(z)$
-1	$\frac{-1-i}{-1+i} = \frac{(-1-i)^2}{2} = i,$
0	$\frac{0-i}{0+i} = -1,$
1	$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i,$
-i	$\frac{-i-i}{-i+i} = \frac{-i2}{0} = \infty.$

Koska tiedetään että suoran, tässä tapauksessa siis reaaliakselin, kuva tässä kuvauksessa on joko suora tai ympyrä niin todetaan, että koska  $i$ ,  $-1$  ja  $-i$  ovat kuvapsiteitä, niin kyseessä on origokeskinen ympyrä  $|w| = 1$  jonka säde siis on 1. Koska pisteen  $-i$  kuva on ääretön niin joukon  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$  kuva on joukko  $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| > 1\}$ .

---

2.

- (a) Onko  $n \times n$  matriisi  $A$  aina kääntyvä (eli  $A^{-1}$  on olemassa) jos löytyy  $n \times n$  matriisi  $B$  siten, että  $AB = C$  missä  $C(i, j) = 1$  kun  $i \leq j$  ja  $C(i, j) = 0$  kun  $i > j$ ? Perustele!  
(b) Onko  $n \times n$  matriisi  $A$ , joka ei ole nolla-matriisi, aina kääntyvä (eli  $A^{-1}$  on olemassa) jos löytyy  $n \times n$  matriisi  $B$  siten, että  $ABA = A$ ? Perustele!

*Ratkaisu:* (a) Ehto  $C(i, j) = 0$  kun  $i > j$  tarkoittaa, että  $C$ :n alkiot lävistäjän alapuolella ovat 0, jolloin siis  $C$ :n determinantti on lävistäjäalkioiden tulo ja tässä tapauksessa kaikki

lävistäjäalkiot ovat 1 joten  $\det(C) = 1$ . Nyt  $\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(C) = 1$  josta seuraa, että  $\det(A) \neq 0$  ja  $A$  on kääntyvä.

(b) Matriisi  $A$  ei välttämättä ole kääntyvä koska jos esimerkiksi

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

koska silloin  $ABA = A$  mutta  $A$  ei ole kääntyvä koska  $\det(A) = 0$ .

---

**3.** Määritä vektoreiden  $(1, 2, -1, 3)$ ,  $(-2, -4, 4, -10)$ ,  $(2, 4, 4, -6)$  ja  $(-1, -2, 3, -7)$  virittämän vektoriavaruuden jokin kanta sekä tämän avaruuden dimensio.

*Ratkaisu:* Kirjoitetaan vektorit matriisiin vaakavektoreina jolloin saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -10 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

Tähän matriisiin sovelletaan Gaussin algoritmia, ja saadaan

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -10 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & -7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 + 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 + r_1 \end{array} \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r_3 \leftarrow r_3 - 3r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_2 \end{array} \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Koska haetaan vaakavektoreiden virittämän avaruuden kanta, ja koska tuki-alkioit sijaitsevat vaakariveillä 1 ja 2, niin kantavektoreiksi voidaan valita vastaavat vaakavektorit porrasmuotisesta matriisista, jolloin kannaksi saadaan  $(1, 2, -1, 3)$  ja  $(0, 0, 2, -4)$ . Koska kannassa on 2 vektoria, niin dimensio on 2.

Jos kirjoitetaan vektorit matriisiin pystyvektoreina niin saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & -10 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

Tähän matriisiin sovelletaan Gaussin algoritmia, ja saadaan

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & -10 & -6 & -7 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 3r_1 \end{array} \\ \sim & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & -12 & -4 \end{bmatrix} \quad r_2 \leftrightarrow r_4 \\ \sim & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -12 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r_3 \leftarrow r_3 + \frac{1}{2}r_2 \\ \sim & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Koska haetaan pystyvektoreiden virittämän avaruuden kanta, ja koska tukialkioit sijaitsevat pystysarakkeilla 1 ja 2, niin kantavektoreiksi voidaan valita vastaavat pystyvektorit alkuperäisestä matriisista, jolloin kannaksi saadaan  $(1, 2, -1, 3)$  ja  $(-2, -4, 4, -10)$  ja dimensioksi saadaan tietenkin taas 2.

---

4. Tutki ja piirrä käyrä  $17x^2 - 12xy + 8y^2 = 20$ .

*Ratkaisu:* Muodostetaan ensin neliömuodon matriisi, joka on

$$A = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan seuraavaksi tämän matriisin ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \det \left( \begin{bmatrix} (17 - \lambda) & -6 \\ -6 & (8 - \lambda) \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0.$$

Tästä saadaan ratkaisuksi,

$$\lambda = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4} - 100} = \begin{cases} 20, \\ 5, \end{cases}$$

joten nähdään, että ominaisarvot ovat  $\lambda_1 = 20$  ja  $\lambda_2 = 5$ .

Seuraavaksi lasketaan ominaisarvoon  $\lambda_1 = 20$  liittyvä ominaisvektori, eli ratkaistaan yhtälö  $(A - 20I)X = 0$ . Gaussin menetelmällä saadaan,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ -6 & -12 & 0 \end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1 \\ \sim & \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että jos valitaan  $x_2 = 1$  niin  $x_1$ :n ratkaisuksi yhtälöstä  $-3x_1 - 6 = 0$  saadaan  $x_1 = -2$ . Ominaisvektoriksi voidaan siis valita  $[-2, 1]^T$ , tai koska halutaan, että sen

pituus on 1,  $X_1 = [-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}]^T$ . Ominaisarvoon  $\lambda_2 = 5$  liittyvä ominaisvektori on kohtisuorassa vektoria  $X_1$  vastaan, joten voidaan valita  $X_2 = [-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}]^T$ . Ominaisvektoreista muodostetaan matriisi

$$V = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

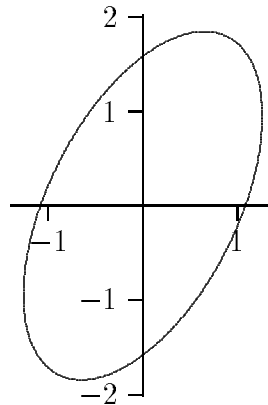
Uudet koordinaatit  $x'$  ja  $y'$  määritellään kaavalla

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Koska  $V$  on valittu ortogonaaliseksi niin  $17x^2 - 12xy + 8y^2 = 20x'^2 + 5y'^2$ . Uudessa koordinaattisysteemissä yhtälö on siis

$$20x'^2 + 5y'^2 = 20.$$

Koska uudet  $x'$ - ja  $y'$ -koordinaattiakselit ovat ominaisvektoreiden suuntaisia, niin käyrä näyttää suunnilleen tällaiselta:



5. Määritä raja-arvot (mikäli ne ovat olemassa)

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2)}{x},$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3)}{f(x-x^2) - 1 - x^2}$  jos tiedetään, että  $f(t) = 1 + t^2 + O(t^4)$  (kun  $t \rightarrow 0$ ).

Ratkaisu: (a) Koska  $|\sin(t)| \leq 1$  niin

$$\left| \frac{\sin(x^2)}{x} \right| \leq \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

ja koska  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 0$  niin saadaan kuristusperiaatteen nojalla  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0$ .

(b) Koska  $\sin(t) = t + O(t^3)$  ja  $f(t) = 1 + t^2 + O(t^4)$  niin

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\sin(x^3)}{f(x-x^2) - 1 - x^2} &= \frac{x^3 + O((x^3)^3)}{1 + (x-x^2)^2 + O((x-x^2)^4) - 1 - x^2} \\ &= \frac{x^3 + O(x^9)}{x^2 - 2x^3 + x^4 + O(x^4) - x^2} = \frac{1 + O(x^6)}{-2 + O(x)}, \end{aligned}$$

joten voidaan päätellä, että

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3)}{f(x - x^2) - 1 - x^2} = \frac{1 + 0}{-2 + 0} = -\frac{1}{2}.$$

---

6. Osoita, että  $\ln(1 + x) \leq x$  kaikilla  $x > -1$  käyttäen esimerkiksi Taylorin kehitelmää.

*Ratkaisu:* Taylorin kehitelmän mukaan

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(t)\frac{x^2}{2},$$

missä  $t$  on jokin luku  $0$ :n ja  $x$ :n välillä (kunhan  $x$  on sellainen että  $f$  on kaksi kertaa derivoituva välillä  $[0, x]$  tai  $[x, 0]$  jos  $x < 0$ ). Tässä tapauksessa  $f'(x) = \frac{1}{1+x}$  ja  $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \leq 0$  kun  $x > -1$ . Näin ollen  $f''(t) < 0$  kun  $x > -1$  ja saadaan

$$f(x) \leq f(0) + f'(0)x = x.$$

---

7. Ratkaise likimääräisesti yhtälö  $x^2 - x^3 - 1 = 0$  Newtonin menetelmällä, siten, että virhe on itseisarvoltaan korkeintaan  $10^{-3}$ . Alkuarvona voit käyttää  $x_0 = -1$ . Voidaanko alkuarvoksi valita  $x_0 = 0$ ?

*Ratkaisu:* Merkitään  $f(x) = x^2 - x^3 - 1$ , jolloin  $f'(x) = 2x - 3x^2$ . Newtonin menetelmän mukaan on silloin laskettava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n^3 - 1}{2x_n - 3x_n^2}.$$

Jos valitaan  $x_0 = -1$ , niin saadaan:

$$x_0 = -1.00000$$

$$x_1 = -0.80000$$

$$x_2 = -0.75682$$

$$x_3 = -0.75488$$

Koska  $f(x_3) = 7.5 \cdot 10^{-6} > 0$  ja  $f(x_3 + 10^{-3}) = -0.0032 < 0$  niin nähdään merkinvaihtolauseen nojalla, että  $x_3 = -0.75488$  kelpaa haetuksi likiarvoksi.

Alkuarvoksi ei voida valita  $x_0 = 0$  koska  $f'(0) = 0$  eikä voida laskea  $x_1$ .

---

8. Tiedetään, että funktio  $f$  on jatkuvasti derivoituva ja että  $f(-1) = 2$  ja  $f'(x) \geq x^2 - 5$  kun  $x \leq 0$ . Mitä voidaan sanoa funktion  $f$  arvosta pisteessä  $x = -4$ .

*Ratkaisu:* Nyt

$$\int_{-4}^{-1} f'(x) dx = \int_{-4}^{-1} f(x) = f(-1) - f(-4),$$

joten

$$f(-4) = f(-1) - \int_{-4}^{-1} f'(x) dx.$$

Koska  $f(-1) = 2$  ja  $f'(x) \geq x^2 - 5$  kun  $x \in [-4, -1]$  niin

$$(2) \quad f(-4) \leq 2 - \int_{-4}^{-1} (x^2 - 5) dx = 2 - \int_{-4}^{-1} \left( \frac{1}{3}x^3 - 5x \right) \\ = 2 - \frac{(-1)^3}{3} + 5 \cdot (-1) + \frac{(-4)^3}{3} - 5 \cdot (-4) = -4.$$

---

9. Määritä funktion  $f(t) = e^{-t} - 2e^{-3t}$  Laplace-muunnos, eli laske integraali  $\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$ . Millä (kompleksiluvun)  $z$  arvoilla pätee, että  $\int_0^\infty |e^{-zt} f(t)| dt < \infty$ ?

*Ratkaisu:*

$$(3) \quad \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = \int_0^\infty (e^{-(z+1)t} - 2e^{-(z+3)t}) dt = \int_0^\infty \left( -\frac{1}{z+1} e^{-(z+1)t} + \frac{2}{z+3} e^{-(z+3)t} \right) \\ = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{z+1} e^{-(z+1)t} + \frac{1}{z+1} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{z+3} e^{-(z+3)t} - \frac{2}{z+3} \\ = \frac{1}{z+1} - \frac{2}{z+3},$$

koska  $e^{-(z+1)0} = e^{-(z+3)0} = 1$  ja  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(z+1)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(z+3)t} = 0$  jos  $\operatorname{Re} z > -1$ .

Jos  $\operatorname{Re} z > -1$  niin  $|e^{-zt} f(t)| \leq e^{-(\operatorname{Re} z + 1)t} + e^{-(\operatorname{Re} z + 3)t}$  ja koska  $\int_0^\infty e^{-at} dt < \infty$  kun  $a > 0$  niin  $\int_0^\infty |e^{-zt} f(t)| dt < \infty$ . Jos  $\operatorname{Re} z \leq -1$  niin  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-zt} f(t)| \geq 1$  ja silloin  $\int_0^\infty |e^{-zt} f(t)| dt = \infty$ .

---

10. Määritä integraalin  $\int_0^2 \sqrt{x+x^3} dx$  likiarvo käyttäen Simpsonin menetelmää ja 4 yhtä pitkää osaväliä. Onko odotettavissa, että jos neljän osavälin sijasta käytetään  $n$  osaväliä, niin virhe on  $O(n^{-4})$  kun  $n \rightarrow \infty$ . (Perustele!)

*Ratkaisu:* Nyt  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = 0.5$  joten Simpsonin menetelmän mukaisesti lasketaan

$$S_4 = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)),$$

missä  $f(x) = \sqrt{x+x^3}$  ja  $x_j = 0 + j \cdot 0.5$ ,  $j = 0, 1, \dots, 4$ . Silloin saadaan

$$S_4 = \frac{0.5}{3} (0 + 4 \cdot 0.79057 + 2 \cdot 1.4142 + 4 \cdot 2.2079 + 3.1623) = 2.9975.$$

Simpsonin menetelmässä virhe käyttäytyy kuten  $O(n^{-4})$ , eli virheen itseisarvo on korkeintaan  $Cn^{-4}$ , olettaen, että  $n$  on neljä kertaa derivoituva ja neljäs derivaatta on rajoitettu. Tässä tapauksessa jo ensimmäinen derivaatta kasvaa äärettömyyteen kun  $x \rightarrow 0+$ , joten ei ole odotettavissa, että jos neljän osavälin sijasta käytetään  $n$  osaväliä, niin virhe olisi  $O(n^{-4})$  kun  $n \rightarrow \infty$

---

11. Määritä origon etäisyys tasojen  $x + y + z = 0$  ja  $2x - y - 5z = 3$  leikkaussuorasta.

*Ratkaisu:* Haetaan ensin jokin leikkausuoran piste ja koska mikä tahansa suoran piste kelpaa, voidaan valita  $z = 0$  jolloin yhtälösystemiksi tulee

$$\begin{aligned}x + y &= 0 \\2x - y &= 3.\end{aligned}$$

Laskemalla yhteen saadaan  $3x = 3$  eli  $x = 1$  jolloin seuraa, että  $y = -1$ . Leikkaussuoran suuntavektori saadaan laskemalla tasojen normaalien ristitulo, koska suuntavektori on molempien tasojen suuntainen eli kohtisuorassa molempien tasojen normaalia vastaan. Suuntavektoriksi tulee siis

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 5\mathbf{k}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & (-1) & (-5) \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (-1) & (-5) \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & (-5) \end{vmatrix} \\ &+ \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & (-1) \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1 \cdot (-5) - 1 \cdot (-1)) - \mathbf{j}(1 \cdot (-5) - 1 \cdot 2) \\ &+ \mathbf{k}(1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) = -4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Pisteen  $(0, 0, 0)$  etäisyys tästä suorasta on

$$\frac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|},$$

missä  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$  ja  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$  jolloin siis

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{v} = (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (-4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (-1) & 1 & 0 \\ (-4) & 7 & (-3) \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & (-3) \end{vmatrix} \\ &- \mathbf{j} \begin{vmatrix} (-1) & 0 \\ (-4) & (-3) \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} (-1) & 1 \\ (-4) & 7 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1 \cdot (-3) - 0 \cdot 7) \\ &- \mathbf{j}((-1) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4)) + \mathbf{k}((-1) \cdot 7 - 1 \cdot (-4)) = -3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Etäisyydeksi tulee siis

$$\frac{\sqrt{9 + 9 + 9}}{\sqrt{16 + 49 + 9}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{74}}.$$

**12.** Funktio  $f(x)$  tunnetaan pisteissä  $x_j = 0 + \frac{j}{N}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, 10N$ . Miten  $N$  olisi valittava jos halutaan, että virhe olisi korkeintaan  $10^{-4}$  kun approksimoidaan funktiota  $f(x)$  välillä  $[0, 1]$  käyttäen lineaarista interpolointia, (eli jokaisella välillä  $[x_{j-1}, x_j]$  funktio  $f$  korvataan korkeintaan astetta yksi olevalla polynomilla joko yhtyy  $f$ :n arvoihin pisteissä  $x_{j-1}$  ja  $x_j$ ), ja kun tiedetään, että  $|f'(x)| \leq 4$ ,  $f''(x) \leq 8$  ja  $f''(x) \geq -12$  kun  $x \in [0, 10]$ .

*Ratkaisu:* Koska käytetään lineaarista interpolointia, niin interpoloinnin virhekaavan mukaan virhe välillä  $[x_{j-1}, x_j]$  on

$$\frac{f''(t)}{2}(x - x_{j-1})(x - x_j),$$

missä  $x_{j-1} \leq t \leq x_j$  kun  $x \in [x_{j-1}, x_j]$ . Nyt

$$|f''(t)| \leq 12$$

Koska  $(x - x_{j-1})(x - x_j)$  on suurimmillaan kun  $x = (x_{j-1} + x_j)/2$  jolloin  $(x - x_{j-1})(x - x_j) = \frac{1}{4}(x_j - x_{j-1})^2 = \frac{1}{4N^2}$ , niin virheen ylärajaksi saadaan  $\frac{3}{2N^2}$  ja

$$\frac{3}{2N^2} < 10^{-4} \quad \text{kun} \quad N \geq 123.$$

---