TKK, Matematiikan laitos — Gripenberg/Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

3. välikoe 13.12.2001

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Määritä funktion f Fourier kertoimet, eli laske integraalit $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt} f(t)\,\mathrm{d}t$ kun n on kokonaisluku ja

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

(Tarkastele erikseen tapaukset $n = 0$ ja $n \neq 0$.)

(b) Määritä integraalin $\int_4^6 \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ likiarvo käyttäen suunnikasmenetelmää ja neljää yhtä pitkää osaväliä.

Ratkaisu: (a) Kun $n = 0$ saadaan

$$\hat{f}(0) = \int_0^1 \mathrm{e}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} t\,\mathrm{d}t = \Big/_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{8}.$$

Kun $n \neq 0$ niin saadaan osittaisintegroinnilla

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt} t\,\mathrm{d}t = \Big/_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt} t - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi n}\frac{1}{2} - \Big/_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(-\mathrm{i}2\pi n)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt} = \frac{\mathrm{i}(-1)^n}{4\pi n} + \frac{(-1)^n - 1}{4\pi^2 n^2}.$$

(b) Nyt $h = \frac{b-a}{n} = \frac{6-4}{4} = 0.5$ joten suunnikasmenetelmän mukaisesti lasketaan

$$T_4 = \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\Big),$$

missä $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ ja $x_j = 4 + j \cdot 0.5$, $j = 0, 1, \dots, 4$. Silloin saadaan

$$T_4 = \frac{0.5}{2}\Big(0.11765 + 2 \cdot 0.099827 + 2 \cdot 0.086003 + 2 \cdot 0.075047 + 0.066202\Big) = 0.1764.$$

2.

(a) Määritä integraali $\int \frac{t-1}{(t-2)(3-t)}\,\mathrm{d}t$.

(b) Onko integraali $\int_4^\infty \left|\frac{t-1}{(t-2)(3-t)}\right|\,\mathrm{d}t$ äärellinen (eli suppeneeko se)?

Ratkaisu: (a) Muodostetaan ensin osamurtokehitelmä

$$\frac{t-1}{(t-2)(3-t)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{3-t},$$

ja kertoimet A ja B löydetään kertomalla yhtälön molemmat puolet $t-2$:lla ja $3-t$:llä jonka jälkeen lasketaan raja-arvot kun $t \to 2$ ja $t \to 3$:

$$A = \lim_{t\to 2}\left(\frac{A(t-2)}{t-2} + \frac{B(t-2)}{3-t}\right) = \lim_{t\to 2}\frac{(t-1)(t-2)}{(t-2)(3-t)} = \lim_{t\to 2}\frac{t-1}{3-t} = 1,$$
$$B = \lim_{t\to 3}\left(\frac{A(3-t)}{t-2} + \frac{B(3-t)}{3-t}\right) = \lim_{t\to 3}\frac{(t-1)(3-t)}{(t-2)(3-t)} = \lim_{t\to 3}\frac{t-1}{t-2} = 2.$$

Näin ollen,

$$\int \frac{t-1}{(t-2)(3-t)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t-2} + \frac{2}{3-t}\right)\,\mathrm{d}t = \ln(|t-2|) - 2\ln(|3-t|) + C.$$

(b) Laskemalla

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\left|\frac{t-1}{(t-2)(3-t)}\right|}{\frac{1}{t}} = 1,$$

todetaan että funktio $\frac{t-1}{(t-2)(3-t)}$ käyttäytyy kuten $\frac{1}{t}$ kun $t \to \infty$ ja koska $\int_1^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \infty$ niin todetaan että myös $\int_4^\infty \left|\frac{t-1}{(t-2)(3-t)}\right|\,\mathrm{d}t = \infty$.

Tämä päättely perustuu siihen, että koska raja=arvo 1 on suurempi kuin 0 niin löytyy positiivinen luku c siten, että $\left|\frac{t-1}{(t-2)(3-t)}\right| \ge c\frac{1}{t}$ kun $t \ge t_0$ ja koska $\int_{t_0}^\infty c\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \infty$ niin saadaan väite. Tässä tapauksessa saadaan helposti myös seuraava epäyhtälö

$$\left|\frac{t-1}{(t-2)(3-t)}\right| \ge \frac{t-1}{(t-1)(t-1)} = \frac{1}{t-1},$$

kun $t > 3$ ja koska $\int_4^\infty \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = \infty$ niin pätee myös $\int_4^\infty \left|\frac{t-1}{(t-2)(3-t)}\right|\,\mathrm{d}t = \infty$.

Lopuksi on tietenkin myös mahdollista käyttää (a)-kohdan tulosta seuraavasti. Kun $t > 3$ niin $|3-t| < t-2$ joten $\frac{1}{t-2} + \frac{2}{3-t} < 0$ ja

$$\int_4^\infty \left|\frac{t-1}{(t-2)(3-t)}\right|\,\mathrm{d}t = \int_4^\infty \left(-\frac{1}{t-2} - \frac{2}{3-t}\right)\,\mathrm{d}t = \Big/_4^\infty \left(-\ln(|t-2|) + 2\ln(|3-t|)\right)$$
$$= \Big/_4^\infty \ln\left(\frac{(t-3)^2}{t-2}\right) = \infty - \ln(\tfrac{1}{2}) = \infty.$$

3.

(a) Määritä käyrän $r = -2\sin(\theta)$ sisäpuolelle jäävän alueen pinta-ala.

(b) Määritä pisteen $(1,0,1)$ kautta kulkevan ja tasojen $3x+2y-z=1$ ja $x-2y+2z=2$ leikkaussuoran suuntaisen suoran yhtälö parametrimuodossa.

Ratkaisu: (a) Koska $\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$ niin todetaan, että kun $\theta \in [0,\pi]$ ja kun $\theta \in [\pi, 2\pi]$ niin saadaan samat käyrän pisteet. Pinta-ala lasketaan kaavalla $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$ ja tässä tapauksessa $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ ja $f(\theta) = -2\sin(\theta)$, joten pinta-alaksi saadaan

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi 4\sin(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi (1-\cos(2\theta))\,\mathrm{d}\theta = \Big/_0^\pi \left(\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right) = \pi - \frac{1}{2}\cdot 0 - 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = \pi.$$

(b) Tasojen leikkaussuora on kohtisuorassa tasojen normaaleja $\mathbf{n}_1 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja $\mathbf{n}_2 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ vastaan ja tämän suoran suuntavektoriksi voidaan silloin valita $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$. Laskemalla todetaan, että

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} \\ &- \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = (4-2)\mathbf{i} - (6+1)\mathbf{j} + (-6-2)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 8\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Suoran yhtälö parametrimuodossa on siis

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t, \\ y &= \quad - 7t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z &= = 1 - 8t, \end{aligned}$$

4.

(a) Määritä (korkeintaan) astetta 2 oleva polynomi p, joka toteuttaa ehdot $p(-2) = 15$, $p(0) = 1$ ja $p(1) = 0$, käyttäen Newtonin interpolointikaavaa. Laske tämän polynomin arvo pisteessä $-\frac{1}{2}$. (Ellet osaa käyttää Newtonin interpolointikaavaa, niin määritä tämä polynomi jollain toisella tavalla.)

(b) Jos funktio f toteuttaa ehdot $f(-2) = 15$, $f(0) = 1$ ja $f(1) = 0$ niin määritä (interpoloinnin virhekaavan avulla) yläraja lausekkeelle $|f(-\frac{1}{2}) - p(-\frac{1}{2})|$ missä p on (a)-kohdassa laskettu polynomi, kun lisäksi tiedetään, että $f'(x) \geq -10$ kun $x \in [-2, 1]$, $|f''(x)| \leq 5$ kun $x \in [-2, 0]$, $|f''(x)| \leq 6$ kun $x \in [0, 1]$, $|f'''(x)| \leq 4$ kun $x \in [-2, -1]$ ja $|f'''(x)| \leq 2$ kun $x \in [-1, 1]$.

Ratkaisu: (a) Jaetut erotukset lasketaan seuraavan kaavion avulla:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
-2	15		
		-7	
0	1		2
		-1	
1	0		

Haettu polynomi on siis

$$p(x) = 15 - 7(x+2) + 2(x+2)(x+0),$$

eli

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Tämän polynomin arvo annetussa pisteessä on $p(-\frac{1}{2}) = 3$.

(b) Interpoloinnin virhekaavan mukaan

$$|f(x) - p(x)| = \frac{|f'''(t)|}{3!} |x - x_0||x - x_1||x - x_2|,$$

missä $\min\{x, x_0, x_1, x_2\} \leq t \leq \max\{x, x_0, x_1, x_2\}$. Tässä tapauksessa $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ja $x = -\frac{1}{2}$ ja tiedetään, että $|f'''(t)| \leq 4$ kun $t \in [-2, 1]$. (On siis otettava huomioon mahdollisuus, että $t \in [-2, -1)$.) Näin ollen virheen ylärajaksi saadaan

$$\left|f(-\tfrac{1}{2}) - p(-\tfrac{1}{2})\right| = \frac{4}{3!}\left|-\tfrac{1}{2} - (-2)\right|\left|-\tfrac{1}{2} - 0\right|\left|-\tfrac{1}{2} - 1\right| = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

Vastaa kurssin kotisivulla olevaan **kurssikyselyyn!**