TKK, Matematiikan laitos Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
2. välikoe 12.11.2001

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Määritä raja-arvo $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}})}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}$, mikäli se on olemassa.

(b) Funktiosta f tiedetään, että $f(1) \le 3$, $f(4) \le 2$ ja $|f'(x)| \le 2$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Seuraako tästä, että $f(2) \le 5$? Perustele!

Ratkaisu: (a) Nyt $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$ jolloin $\lim_{x\to 0+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$ ja koska $\lim_{y\to -\infty} \mathrm{e}^y = 0$ niin $\lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$. Koska lisäksi $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \ne 0$ kaikilla $x \ne 0$ niin

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}})}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}} = 1,$$

koska $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.

Mutta toisaalta $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ jolloin $\lim_{x\to 0-} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$ ja koska $\lim_{y\to\infty} \mathrm{e}^y = \infty$ niin $\lim_{x\to 0-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \infty$ ja erikoisesti $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}} = 0$. Koska $|\frac{\sin(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}})}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}| \le \frac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}$ niin seuraa kuristusperiaatteen nojalla, että

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}})}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}} = 0.$$

Koska vasemmanpuolinen ja oikeanpuolinen raja-arvo ovat erisuuret, niin todetaan, että raja-arvo $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}})}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}$ ei ole olemassa.

(b) Väliarvolauseen nojalla

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1) + f'(t)(2-1) \quad \text{ja} \\ f(2) &= f(4) + f'(s)(2-4), \end{aligned}$$

missä $t \in (1,2)$ ja $s \in (2,4)$. Oletuksen mukaan pätee $|f'(t)| \le 2$ ja $|f'(s)| \le 2$, joten

$$\begin{aligned} f(2) &\le f(1) + |f'(t)||2-1| \le 3 + 2\cdot 1 = 5 \quad \text{ja} \\ f(2) &\le f(4) + |f'(s)||2-4| \le 2 + 2\cdot 2 = 6. \end{aligned}$$

Tästä päätellään, että $f(2) \le 5$.

2.

(a) Jos oletetaan, että f on kaksi kertaa derivoituva, positiivinen ja konveksi funktio jollakin välillä (a,b), niin seuraako tästä, että $\sqrt{f(x)}$ on konveksi tällä välillä? Entä $f(x)^2$? Perustele!

(b) Määritä funktion $\ln(1+\sin(x))$ astetta 3 oleva Taylorin polynomi pisteessä $a = 0$. Voit käyttää hyväksesi tietoa, että $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$ ja $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$.

Ratkaisu: (a) Funktio $\sqrt{f(x)}$ ei välttämättä ole konveksi koska jos esimerkiksi $(a,b) = (1,2)$ ja $f(x) = x$ niin f toteuttaa kaikki edellä mainitut ehdot, mutta $g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x}$ ei ole konveksi koska $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} < 0$ kun $x \in (1,2)$. (On tietenkin myös mahdollsiat että $\sqrt{f(x)}$ on konveksi, esimerkiksi jos $f(x) = e^x$.

Jos $h(x) = f(x)^2$ niin $h'(x) = 2f(x)f'(x)$ ja $h''(x) = 2f(x)f''(x) + 2f'(x)^2 + 2 \geq 0$ koska $f(x) > 0$ ja $f''(x) \geq 0$. Näin ollen $f(x)^2$ on konveksi välillä (a,b).

(b) Annettujen kehitelmien perusteella

$$\ln(1+\sin(x)) = \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(x)^2 + \frac{1}{3}\sin(x)^3 + O(\sin(x)^4).$$

Nyt $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ joten $\sin(x)^2 = (x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5))^2 = x^2 + \frac{1}{36}x^6 + O(x^5)^2 - \frac{1}{3}x^4 + 2xO(x^5) - \frac{1}{3}x^3O(x^5) = x^2 + O(x^4)$. Samalla tavalla nähdään, että $\sin(x)^3 = (x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5))^3 = x^3 + O(x^4)$ ja että $O(\sin(x)^4) = O(x^4)$. Näin ollen

$$\ln(1+\sin(x)) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4).$$

Tästä seuraa, että haettu astetta 3 oleva Taylorin polynomi on $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$.

---

3. Hae likimääräisesti yhtälön $x^2\cos(x) + e^{-x} = 0$ jokin ratkaisu Newtonin menetelmällä siten, että virhe on itseisarvoltaan korkeintaan 10^{-3}. Alkuarvona voit käyttää $x_0 = 2$. Montako ratkaisua tällä yhtälöllä kaiken kaikkiaan on? (Perustele lyhyesti!)
Huom! *Muista käyttää radiaaneja laskimessasi!*

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = x^2\cos(x) + e^{-x}$, jolloin $f'(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x) - e^{-x}$. Newtonin menetelmän mukaan on silloin laskettava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{{x_n}^2\cos(x_n) + e^{-x_n}}{2x_n\cos(x_n) - {x_n}^2\sin(x_n) - e^{-x_n}}.$$

Jos valitaan $x_0 = 2$, niin saadaan:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2.00000 \\ x_1 &= 1.71874 \\ x_2 &= 1.64774 \\ x_3 &= 1.64260 \end{aligned}$$

Koska $f(x_3) = -0.000093 < 0$ ja $f(x_3 - 10^{-3}) = 0.003 > 0$ niin nähdään merkinvaihtolauseen nojalla, että $x_3 = 1.64260$ kelpaa haetuksi likiarvoksi.

Koska $0 \leq e^{-x} \leq 1$ kun $x \geq 0$ niin nähdään, että kun $n \geq 1$ niin $f((2n-1)\pi) = (2n-1)^2\pi^2\cos((2n-1)\pi) + e^{-(2n-1)\pi} < -(2n-1)^2\pi^2 + 1 < 0$ ja $f(2n\pi) = (2n)^2\pi^2\cos(2n\pi) + e^{-2n\pi} > (2n)^2\pi^2 > 0$ joten merkinvaihtolauseen nojalla funktiolla on nollakohta välillä $((2n-1)\pi, 2n\pi)$. Tästä siis seuraa, että funktiolla on äärettömän monta nollakohtaa.

4.

(a) Mikä integraali saadaan laskettavaksi jos integraalissa $\int_3^8 \frac{t+1}{\sqrt{\frac{t}{2+t}}+1}\,\mathrm{d}t$ tehdään sijoitus $\sqrt{\frac{t}{2+t}} = x$? Tätä uutta integraalia ei tarvitse laskea.

(b) Osoita, että $\int_0^1 \frac{x}{1+2\ln(1-\frac{x}{2})+x+x^2}\,\mathrm{d}x \geq \ln(\sqrt{2})$, käyttämällä hyväksi epäyhtälöä $\ln(1+t) \leq t$, kun $t > -1$.

Ratkaisu: (a) Jos $\sqrt{\frac{t}{2+t}} = x$ niin $\frac{t}{2+t} = x^2$, eli $t = 2x^2 + tx^2$ josta seuraa, että

$$t = \frac{2x^2}{1-x^2}.$$

Tästä taas seuraa, että $t + 1 = \frac{2x^2}{1-x^2} + 1 = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ ja

$$\mathrm{d}t = \frac{4x(1-x^2) - 2x^2(-2x)}{(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{4x}{(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Lisäksi, kun $t = 3$ niin $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ ja kun $t = 8$ niin $x = \sqrt{\frac{8}{10}}$. Uudeksi integraaliksi tulee silloin

$$\int_{\sqrt{\frac{3}{5}}}^{\sqrt{\frac{8}{10}}} \frac{\frac{1+x^2}{1-x^2}}{x+1}\frac{4x}{(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{\frac{3}{5}}}^{\sqrt{\frac{8}{10}}} \frac{(1+x^2)4x}{(x+1)(1-x^2)^3}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Koska $\ln(1+t) \leq t$ kun $t > -1$ niin $2\ln(1-\frac{x}{2}) \leq -2\frac{x}{2} = -x$ jolloin $1 + 2\ln(1-\frac{x}{2}) + x + x^2 \leq 1 - x + x + x^2 = 1 + x^2$ ja tästä seuraa, koska $x \in [0,1]$, että $\frac{x}{1+2\ln(1-\frac{x}{2})+x+x^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$ ja

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+2\ln(1-\frac{x}{2})+x+x^2}\,\mathrm{d}x &\geq \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big/_0^1 \ln(1+x^2) \\ &= \frac{1}{2}\big(\ln(2) - \ln(1)\big) = \frac{1}{2}\ln(2) = \ln(\sqrt{2}).\end{aligned}$$

(Jos integroinnissa ei haluta käyttää suoraan ketjusääntöä voidaan suoritta muutujan vaihto $1 + x^2 = t$ jolloin $x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$ ja kun $x = 0$ niin $t = 1$ ja kun $x = 1$ niin $t = 2$ jolloin laskettavaksi tulee $\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.)
