

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktioalaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!*

1.

- (a) Kirjoita kompleksiluku $\frac{z-i}{2-\bar{z}}$ muodossa $a+ib$ kun $z=1+i$.
(b) Olkoon $w=-1-i$. Määritä yhtälön $e^z=w$ kaikki ratkaisut, eli määritä kaikki funktion $\ln(w)$ arvot.

Ratkaisu: (a) Kun $z=1+i$ niin $\bar{z}=1-i$ ja

$$\frac{z-i}{2-\bar{z}} = \frac{1+i-i}{2-1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}.$$

(b) Kompleksiluvun w itseisarvo on $|w| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, ja w :n argumentti on $\arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ (tässä lisättiin π koska $\operatorname{Re} w < 0$). Jos $z=a+ib$ niin $|e^z| = e^a$ ja $\arg(e^z) = b$, joten jos nyt $e^z=w$ niin $e^a = \sqrt{2}$ ja $b = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$ missä n on kokonaisluku. Tästä seuraa, että $a = \ln(\sqrt{2})$ jolloin haetut ratkaisut ovat

$$z = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi Gaussin algoritmin avulla.

Ratkaisu: Gaussin algoritmin avulla saadaan

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 + 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 \end{array} \\ \sim & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} r_1 \leftarrow r_1 + 3r_3 \\ r_2 \leftarrow r_2 + 7r_3 \end{array} \\ \sim & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & r_3 \leftarrow -r_1 \\ \sim & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tästä päätellään, että käänteismatriisi on

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Määritä jokin polynomi p (esimerkiksi Taylorin polynomi) siten, että

$$\left| p(x) - e^{-x^2} \right| < 0.01 \text{ kun } |x| \leq 1.$$

Ratkaisu: koska $0 \leq x^2 \leq 1$ kun $|x| \leq 1$ niin nähdään, että jos löydetään polynomi q siten, että $|q(t) - e^{-t}| \leq 0.01$ kun $t \in [0, 1]$, niin silloin polynomille $p(x) = q(x^2)$ pätee $\left| p(x) - e^{-x^2} \right| < 0.01$ kun $|x| \leq 1$. Taylorin kaavan mukaan

$$f(t) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} t^j = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} t^{n+1},$$

missä s on $0:n$ ja $t:n$ välillä, eli $s \in (0, t)$ jos $t > 0$. Jos $f(t) = e^{-t}$ niin $f^{(j)}(t) = (-1)^j e^{-t}$ joten jos $t \in [0, 1]$ niin että $s \geq 0$ niin

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} t^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} |t|^{n+1} \stackrel{0 \leq t \leq 1}{\leq} \frac{1}{(n+1)!}.$$

Nyt valitaan siis

$$q(t) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} t^j = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n!},$$

missä n siis on valittava niin, että $\frac{1}{(n+1)!} < 0.01$ ja tähän riittää valita $n = 4$ koska $(4+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 > 100$. Valitaan siis $q(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}$, ja silloin

$$p(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}.$$

4. Ratkaise likimääräisesti yhtälö $x^3 + \ln(1+x^2) - 2 = 0$ Newtonin menetelmällä, siten, että virhe on itseisarvoltaan korkeintaan 10^{-4} . Alkuarvona voit käyttää $x_0 = 1$.

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = x^3 + \ln(1+x^2) - 2$, jolloin $f'(x) = 3x^2 + \frac{2x}{1+x^2}$. Newtonin menetelmän mukaan on silloin laskettava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + \ln(1+x_n^2) - 2}{3x_n^2 + \frac{2x_n}{1+x_n^2}}.$$

Jos valitaan $x_0 = 1$, niin saadaan:

$$x_0 = 1.000000$$

$$x_1 = 1.076713$$

$$x_2 = 1.072683$$

Koska $f(x_2) = 0.000051 > 0$ ja $f(x_2 - 10^{-4}) = -0.00039 < 0$ niin nähdään merkinvaihtolauseen nojalla, että $x_2 = 1.072683$ kelpaa haetuksi likiarvoksi.

5.

(a) Suorita sijoitus $x = \tan(t)$ integraalissa

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x^2}} dx.$$

Näin saatua uutta integraalia ei tarvitse laskea.

(b) Määritä integraalin $\int_0^3 \sin(x + x^2) dx$ likiarvo käyttäen Simpsonin menetelmää ja 4 yhtä pitkää osaväliä. Muista käyttää radiaaneja laskimessasi!

Ratkaisu: (a) Jos $x = \tan(t)$ niin $dx = \frac{1}{\cos^2(t)} dt$ ja kun $x = 0$ niin $t = 0$ ja kun $x = 1$ niin $t = \frac{\pi}{4}$. Näin ollen uudeksi integraaliksi tulee

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{\sin(t)^2}{\cos(t)^2}}} \frac{1}{\cos(t)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)^2 + \cos(t)} dt,$$

koska $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ ja $\sqrt{\cos(t)^2} = \cos(t)$ koska $\cos(t) > 0$ kun $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

(b) Nyt $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{4} = 0.75$ joten Simpsonin menetelmän mukaisesti lasketaan

$$S_4 = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \right),$$

missä $f(x) = \sin(x + x^2)$ ja $x_j = 0 + j \cdot 0.75$, $j = 0, 1, \dots, 4$. Silloin saadaan

$$S_4 = \frac{0.75}{3} \left(0 + 4 \cdot 0.96683 + 2 \cdot (-0.57156) + 4 \cdot 0.85695 + 2 \cdot (-0.53657) \right) = 1.4038.$$
