TKK, Matematiikan laitos — Gripenberg
Mat-1.510 Wavelet teoria
Harjoitus 8
4.11–11.11.2002

1. Määritä luvut c_{-2}, c_{-1}, c_1 ja c_2 siten, että jos p on astetta 3 oleva polynomi jolle pätee $p(x_0 - \frac{3}{2}h) = f_{-2}$, $p(x_0 - \frac{1}{2}h) = f_{-1}$, $p(x_0 + \frac{1}{2}h) = f_1$ ja $p(x_0 + \frac{3}{2}h) = f_2$ niin $f(x_0) = c_{-2}f_{-2} + c_{-1}f_{-1} + c_1 f_1 + c_2 f_2$.
Vihje: Kirjoita $p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)$ jolloin ainoastaan on ratkaistava a_0.

2. Olkoon α seuraava jono:

$$\begin{aligned}
\alpha(0) &= \tfrac{1}{8}(1+\sqrt{3}),\\
\alpha(1) &= \tfrac{1}{8}(3+\sqrt{3}),\\
\alpha(2) &= \tfrac{1}{8}(3-\sqrt{3}),\\
\alpha(3) &= \tfrac{1}{8}(1-\sqrt{3}),\\
\alpha(k) &= 0 \quad \text{muuten.}
\end{aligned}$$

Laske jono $\gamma(n) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha(j)\alpha(j+n)$ kun n on pariton. (Aikaisempien laskujen perusteellahan tiedetään, että $\gamma(2n) = \frac{1}{2}\delta_{0,n}$.)

Miten nämä luvut liittyvät edellisessä tehtävässä laskettuihin lukuihin?

3. Olkoon α seuraava jono missä $\alpha(0) = \alpha(2) = \frac{1}{2}$ ja $\alpha(n) = 0$ muuten. Määrittele funktiot F_j, $j \geq 0$ siten, että $F_0(n) = \delta_{0,n}$,

$$F_{j+1}(2^{-j-1}n) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha(n-2k)F_j(2^{-j}k), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad j \geq 0,$$

ja muilla arvoilla funktiot F_j määritetään lineaarisella interpolaatiolla, eli $F_j(\underline{x}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_j(2^{-j}n)w(2^j\underline{x} - n)$ missä $w(\underline{x}) = \max\{0, 1 - |\underline{x}|\}$. Mitä tapahtuu funktioille F_j kun $j \to \infty$.