TKK, Matematiikan laitos Gripenberg
Mat-1.510 Wavelet teoria
Harjoitus 7
28.10–4.11.2002

1. Oleta, että funktio f on m kertaa jatkuvasti derivoituva, supp f on kompakti mutta ei ole tyhjä (eli $f \not\equiv 0$), ja

$$f(\underline{x}) = 2 \sum_{k=a_-}^{a_+} \alpha(k) f(2\underline{x} - k).$$

Osoita, ettei mikään jonoista $(f^{(j)}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$, $0 \leq j \leq m$, ole nolla-jono.

2. Oleta, että funktio f on m kertaa jatkuvasti derivoituva, supp f on kompakti mutta ei ole tyhjä (eli $f \not\equiv 0$), ja

$$f(\underline{x}) = 2 \sum_{k=a_-}^{a_+} \alpha(k) f(2\underline{x} - k).$$

Osoita, että $m < a_+ - a_- - 1$ osoittamalla, että 2^{-p} on matriisin M ominaisarvo kun $0 \leq p \leq m$ missä

$$M(i,j) = 2\alpha(2i - j + a_-), \quad i, j = 1, \ldots, a_+ - a_- - 1.$$

Voit olettaa tunnetuksi että $f(x) = 0$ kun $x < a_-$ ja kun $x > a_+$ ja ota huomioon mitä silloin tiedät luvuista $f^{(p)}(a_-)$ ja $f^{(p)}(a_+)$ jatkuvuuden nojalla.

3. Olkoon $\alpha \in l^1(\mathbb{Z})$. Määritellään operaattorit T_α ja $S_\alpha : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ seuraavasti:

$$(T_\alpha c)(k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha(j-2k)} c(j) \quad \text{ja} \quad (S_\alpha c)(k) = 2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha(k-2j) c(j).$$

Määritä operaattorit T_α^* ja S_α^* (joille siis pätee $\langle T_\alpha c, d\rangle = \langle c, T_\alpha^* d\rangle$ ja $\langle S_\alpha c, d\rangle = \langle c, S_\alpha^* d\rangle$). Millä ehdolla pätee $T_\alpha T_\alpha^* = \frac{1}{2} I$?