TKK, Matematiikan laitos Gripenberg
Mat-1.510 Wavelet teoria
Harjoitus 6
21.10–28.10.2002

1. Olkoon f sellainen $\mathbb{R}$:llä määritelty funktio, että sen Fourier-muunnos $\hat{f}$ toteuttaa ehdon

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|^{\alpha})\,|\hat{f}(\omega)|\,\mathrm{d}\omega < \infty,$$

missä $\alpha \geq 0$. Olkoon $n = \lfloor \alpha \rfloor$ ja $\beta = \alpha - n$ (jolloin siis $0 \leq \beta < 1$). Olettaen tunnetuksi että $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ osoita, että

$$\sup_{x,h\in\mathbb{R}} \frac{|f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x)|}{|h|^{\beta}} < \infty,$$

(eli f:n n:s derivaatta on Hölder-jatkuva eksponentilla β.

2. Olkoon $N > 1$ ja määritellään $P_N(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} \underline{x}^k$ jolloin siis pätee $(1 - \underline{x})^n P_N(\underline{x}) + \underline{x}^N P_N(1-\underline{x}) = 1$.
(a) Laske $P_N(\frac{1}{2})$.
(b) Osoita, että $x^{-N+1}P_N(x) > y^{-N+1}P_N(y)$ kun $0 < x < y$.
(c) Osoita, että $P_N(1) < 2^{2N-2}$.

3. Osoita induktiolla, että

$$\prod_{k=1}^{m} \left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi\omega}{2^k}}\right) = \sum_{j=0}^{2^m-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi\omega j}{2^m}}.$$

Laske tämän tuloksen avulla

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi\omega}{2^k}}}{2}\right).$$