TKK, Matematiikan laitos — Gripenberg
Mat-1.510 Wavelet teoria
Harjoitus 4
7.10–14.10.2002

1. Olkoon $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ja määrittele jono b siten, että $b(\underline{n}) = a(2\underline{n})$. Esitä jonon b Fourier-muunnos $\hat{b}$ jonon a Fourier-muunnoksen $\hat{a}$ avulla.

2. Olkoon $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (ja voidaan olettaa että jonossa on vain äärellisen monta nollasta poikeavaa elementtiä). Osoita, että

$$|\hat{\alpha}(\underline{\omega})|^2 + |\hat{\alpha}(\underline{\omega} + \tfrac{1}{2})|^2 \overset{\text{a.e.}}{=} 1,$$

jos ja vain jos

$$2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha(k)\overline{\alpha(k+2n)} = \delta_{0,n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Olkoon α jono siten, että $\alpha(k) = 0$ jos $k < a_-$ tai $k > a_+$. Oleta, että φ toteuttaa yhtälön

$$\varphi(\underline{x}) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha(k)\varphi(2\underline{x} - k),$$

ja että φ on nolla jonkin rajoitetun välin ulkopuolella. Minkä välin ulkopuolella φ on varmasti 0?