TKK, Matematiikan laitos — Gripenberg
Mat-1.510 Wavelet teoria
Harjoitus 2
23–30.9.2002

1. Osoita, että jos φ on sellainen että $(\varphi(\bullet - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali joukko, niin silloin $\lim_{m\to\infty} P_m f \to 0$ ($L^2(\mathbb{R})$:ssä) jokaisella $f \in L^2(\mathbb{R})$ missä P_m on ortogonaalinen projektio funktioiden $(2^{-\frac{m}{2}}\varphi(2^{-m}\bullet - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ virittämälle (suljetulle) aliavaruudelle V_m
Vihje: Voit olettaa tunnetuksi, että $(2^{-\frac{m}{2}}\varphi(2^{-m}\bullet - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali joukko ja että yleisesti pätee, että jos $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali joukko ja P on projektio sen virittämälle suljetuulle aliavaruudelle, niin $\|Pu\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle u, e_n\rangle|^2$. Perustele miksi riittää f:n paikalle ottaa mielivaltaisen välin karakteristinen funktio.

2. Olkoot $\alpha(-1) = \alpha(2) = \frac{1}{2}$ ja $\alpha(k) = 0$ kun $k \neq -1, 2$. Laske jonon α Fourier-muunnos $\hat{\alpha}(\underline{\omega}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\underline{\omega}k}\alpha(k)$ ja tarkista, että

$$\left|\hat{\alpha}(\omega)\right|^2 + \left|\hat{\alpha}(\omega + \tfrac{1}{2})\right|^2 = 1,$$

kaikilla ω.

3. Olkoot $\alpha(-1) = \alpha(2) = \frac{1}{2}$ ja $\alpha(k) = 0$ kun $k \neq -1, 2$. Määritä funktio φ siten, että

$$\varphi(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha(k)\varphi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R},$$

ja siten, että $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Onko $(\varphi(\bullet - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ ortonormaali joukko $L^2(\mathbb{R})$:ssä?
Vihje: Funktio φ ei ole kovin monimutkainen eikä sen löytämiseksi tarvita muuta kuin vähän kokeiluja,