TKK, Matematiikan laitos — Gripenberg
Mat-1.510 Wavelet teoria
Harjoitus 11
25.11–2.12.2002

1. Osoita, etteivät funktiot $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n\underline{x}})_{n\in\mathbb{Z}}$ muodosta avaruuden $L^1([0,1];\mathbb{C})$ Schauder-kantaa (kun niiden järjestys on $n = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$) esim. seuraavasti:

(a) Osoita, että jos $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n\underline{x}} \to f(\underline{x})$ (avaruudessa $L^1([0,1];\mathbb{C})$) niin $c_n = \hat{f}(n)$.

(b) Osoita, että

$$S_N f(\underline{x}) = \int_0^1 D_N(\underline{x}-t)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

missä $S_N f(\underline{x}) = \sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n\underline{x}}$ ja $D_N(\underline{x}) = \sum_{k=-N}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n\underline{x}}$.

(c) Osoita, että $D_N(\underline{x}) = \frac{\sin(\pi(2N+1)\underline{x})}{\sin(\pi\underline{x})}$, ja että

$$\int_0^1 |D_N(x)|\,\mathrm{d}x \ge \int_0^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\pi x}\right|\mathrm{d}x \ge \frac{1}{\pi}\int_0^{N\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t.$$

(d) Osoita, että jos $\lim_{N\to\infty} S_N f = f$ (avaruudessa $L^1([0,1];\mathbb{C})$) kaikilla $f\in L^1([0,1];\mathbb{C})$ niin saadaan ristiriita, käyttäen hyväksi seuraavia tuloksia: Tasaisen rajoittuneisuuden periaate (Banach-avaruudessa joko $\sup_\alpha\|T_\alpha\| < \infty$ tai $\sup_\alpha\|T_\alpha x\| = \infty$ jollain x missä T_α on jatkuva lineaarikuvaus); kuvauksen $f\in L^1([0,1]) \mapsto \int_0^1 g(\underline{x}-t)f(t)\,\mathrm{d}t \in L^1([0,1])$ normi on $\|g\|_{L^1([0,1])}$ ja $\int_0^\infty\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t = \infty$.

2. Olkoon $\varphi = \chi_{[0,1)}$ ja $\psi = \chi_{[0,\frac{1}{2})} - \chi_{[\frac{1}{2},1)}$. Lisäksi $\varphi_{m,k} = 2^{-m/2}\varphi(2^{-m}\bullet - k)$ and $\psi_{m,k} = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}\bullet - k)$ kaikilla m ja $z\in\mathbb{Z}$. Osoita, että funktioiden $\{\varphi_{m_0,k},\psi_{m,k}\}_{m\le m_0,k\in\mathbb{Z}}$ virittämä joukko on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R})$ kun $1\le p<\infty$ ja $m_0\in\mathbb{Z}$

3. Olkoot $\varphi_{m_0,k}$ ja $\psi_{m,k}$, $m\le m_0$ kuten edellisessä tehtävässä. Järjestetään nämä funktiot jonoksi $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siten, että jos $g_{n_1} = \varphi_{m_0,k}$, $g_{n_2} = \psi_{m_0,k}$ niin $n_1 < n_2$ ja jos $g_{n_1} = \psi_{m_1,k_1}$ $g_{n_2} = \psi_{m_2,k_2}$ missä $[2^{m_1}k_1, 2^{m_1}(k_1+1)] \supset [2^{m_2}k_2, 2^{m_2}(k_2+1)]$ niin $n_1\le n_2$. Osoita, että $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Schauder-kanta avaruudessa $L^p(\mathbb{R})$, missä $1\le p\le\infty$ osoittamalla, että jos $f_j = \sum_{n=1}^{j}\gamma_n g_n$, niin $\|f_j\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \|f_{j+1}\|_{L^p(\mathbb{R})}$.