TKK, Matematiikan laitos Gripenberg

Mat-1.510 Wavelet teoria

Harjoitus 1

12.9–22.9.2002

1. Osoita, että jono $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali kanta Hilbert avaruudessa H (eli $\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{n,m}$ ja $\overline{\operatorname{span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}} = H$) jos ja vain jos pätee

$$\|e_n\| = 1, \quad n\in\mathbb{Z} \quad \text{ja} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_n\rangle|^2 = \|f\|^2, \quad f\in H.$$

2. Olkoon $\phi \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Silloin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät (joillakin luvuilla A ja B):

(a) Jokaisella jonolla $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ pätee

$$A\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2 \le \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\phi(\bullet - k)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le B\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2$$

(b)

$$A \overset{\text{a.e.}}{\le} \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\phi}(\bullet + m)\right|^2 \overset{\text{a.e.}}{\le} B$$

Vihje: Merkitse $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\phi(\bullet - k)$ ja laske Fourier-muunnos $\hat{f}$. Osoita myös, että $\int_{\mathbb{R}}|\hat{f}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \int_0^1\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(\omega+m)|^2\,\mathrm{d}\omega$, ja muista, että c:n Fourier-muunnos on jaksollinen jaksolla 1. Huomaa myös, että jos $E\subset[0,1]$ on mitallinen joukko jonka mitta on >0 (eli esim. ei-tyhjä avoin väli), niin silloin löytyy jono $c\in\ell^2(\mathbb{Z})$ siten, että $\hat{c}(\omega) \overset{\text{a.e.}}{=} 1$ kun $\omega\in E$ ja 0 muuten.

3. Olkoon $N_1(\underline{t}) = \chi_{[0,1)}(\underline{t})$, eli $N_1(t) = 1$ kun $0\le t<1$ ja $N_1(t) = 0$ muuten, ja olkoon $N_m = N_{m-1} * N_1$ kun $m\ge 2$.

(a) Osoita, että

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{N_m}(\omega+k)|^2 = \sin(\pi\omega)^{2m}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\pi\omega+\pi k)^{2m}},$$

kaikilla $\omega\in\mathbb{R}\setminus Z$.

(b) Osoita edellisen nojalla, että

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{N_1}(\omega+k)|^2 \overset{\text{a.e.}}{=} 1,$$

ja että

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{N_2}(\omega+k)|^2 \overset{\text{a.e.}}{=} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos(\pi\omega)^2.$$

(Nämä kaavat pätevät kyllä kaikilla ω.)

Vihje: $\cot(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{x+\pi k}$ ja derivoimalla saadaan lisää kaavoja.