INVERSIO-ONGELMAT JA MITTAUSTEN TULKINTA

Erkki Somersalo
Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Johdanto

Inversio–ongelmilla tarkoitetaan yleisesti ongelmia, joissa pyritään määräämään jokin suure, joka esiintyy implisiittisenä tekijänä vastaavassa suorassa ongelmassa. Termi inversio–ongelma eli käänteinen ongelma on siten jossain määrin mielivaltainen, koska se vaatii selitykseen suoran ongelman käsitteen. Voisimme yhtä hyvin ajatella, että suora ongelma on itse asiassa inversio–ongelman käänteinen ongelma. Useimmissa tapauksissa on kuitenkin yhteydestä selvää, mikä on luonnollinen suora onglema, mikä taas inversio–ongelma. Esimerkkinä voimme ajatella lämmön siirtymistä kappaleessa. Jos kappaleen lämpötilajakauma on jollakin ajanhetkellä on tunnettu, voimme seurata lämpöjakauman kehitystä ajan funktiona ratkaisemalla tilannetta kuvaava diffuusioyhtälö. *Kausaaliseen* suuntaan eli ajassa eteenpäin kulkeminen on tässä tapauksessa suora ongelma. Se on myös numeerisesti *stabiili* suunta: pienet erot alkutilanteessa vaikuttavat yhä vähemmän lopputilaan, kun aika kuluu. Vastaava inversio–ongelma on yrittää selvittää kappaleen alkuperäinen lämpötilajakauma, kun lopputilanne tunnetaan. Ongelma on nyt *ei–kausaalinen*, ajassa taaksepäin etenevä, ja tyypillisesti *epästabiili*: pienet erot lopputilanteessa saattavat merkitä suuria eroja laskemalla saadussa alkutilassa. Väärinkäsitysten välttämiseksi huomautettakoon tässä, että kausaaliseen suuntaan etenevät laskualgoritmit eivät kuitenkaan aina ole stabiileja. Hyvänä esimerkkinä toimii säätilan ennustaminen, joka on kausaalisesta luonteestaan huolimatta erittäin epästabiili tehtävä.

Inversio–ongelmat liityvät kiinteästi datan tulkintaongelmiin. Luonnontieteissä ja tekniikassa ollaan kiinnostuneita suureista, joita ei suoraan voida mitata. Mittaus joudutaan suunnittelemaan siten, että mitataankin epäsuorasti suuretta, jonka tiedetään tai uskotaan riippuvan kiinnostavasta suureesta. Tämä suure joudutaan laskennallisesti ratkaistaan mittaustuloksesta. Vaikeuksia syntyy aina, kun mittaus on epätarkka ja kohinainen, ja kun algoritmi on numeerisesti epästabiili.

Inversio–ongelmat muodostavat keskeisen ongelmakentän useilla sovellusaloilla, joista voitaisiin mainita esimerkkeinä seuraavat:

- **Numeerinen analyysi:** Numeerinen epästabiilisuus vaikeuttaa usein periaatteessa yksinkertaisenkin ongelman ratkaisua, kuten lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisua, numeerista derivointia tai interpolointia kohinaisesta datasta. Näitä esimerkkejä käsitellään luvussa 1.

- **Lääketieteelliset kuvausmenetelmät ja ainetta rikkomaton materiaalintestaus:** Kun halutaan selvittää kappaleen sisäinen rakenne ei–invasiivisesti, joudutaan usein hankalien inversio–ongelmien kanssa tekemisiin. Luvussa 2 käsitellään erästä jo klassista menetelmää, tietokonetomografiaa (CT = Computerized Tomography). Luvussa 3 sivutaan esimerkkinä probleemaa, joka liittyy läheisesti sähköiseen aivomittaukseen (EEG = Electric Encephalography). Luku 4 käsittelee puolestaan impedanssitomografiaa (EIT=Electric Impedance Tomography). Muista menetelmistä voitaisiin mainita magneettikuvaus (MRI = Magnetic Resonance Imaging) ja positroniemissiotomografia (PET = Positron Emission Tomography), sekä ultraäänikuvaus.

- **Kaukokartoitus:** Nykyisin erilaisia satelliittikuvia käytetään paljon mm. ympäristön seurantaan ja jääkarttojen tekoon. Inversio–ongelmana on laskea satelliittidatasta lähtien estimaatti tutkittavalle maastosuureelle, kuten esimerkiksi lumipeitteen paksuudelle tai lehvästön paksuudelle. Käytännössä joudutaan usein turvautumaan erilaisiin empiirisiin tai puoliempiirisiin sirontamalleihin. Näissä malleissa taustalla oleva tutkaperiaate ja siihen liittyvä signaalinkäsittely ovat aiheina luvussa 5.

Käsillä oleva moniste ei pyri olemaan kattava esitys inversio–ongelmien laajasta kentästä, vaan kyseessä on tekijän omien harrastusten ohjaama läpileikkaus alasta. Aineistoon on pyritty sisällyttämään yleishyödyllisiä työkaluja, joita kehiteltyinä voidaan soveltaa vaativiinkin käytännön ongelmiin. Sovelletulle matematiikalle tyypillinen piirre on vaadittavien taustatietojen kirjavuus. Monisteen loppuun on siksi kerätty tarvittavaa taustatietoa liitteiksi. Näitä osia on tarkoitus käydä läpi pääasiassa laskuharjoituksissa.