

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2000

<http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/>

Laskuharjoitus 4 (viikko 41 , 10–12.10)

Otetaan tällä kertaa systeemillä $AV=4$, $LV=7$. Harj 1 – 4 kuuluvat 1. välikokeen aihepiiriin.

Alkuviikko

1. Laske kiertomatriisin $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

Ominaisarvot ja -vektorit. Saadaanko millään kiertokulman arvoilla reaalisia ja jos, niin millä?

2. Diagonalisoi matriisi A tai perustelee diagonalisoitumattomuus, kun

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Tee diagonalisoituvan tapauksen suhteen johtopäätös, että ominaisarvot voivat olla erilliset, vaikka matriisi ei olekaan symmetrinen. Ovatko ominaisvektorit ortogonaaliset?

3. Ratkaise systeemi $\mathbf{v}' = A\mathbf{v}$, missä

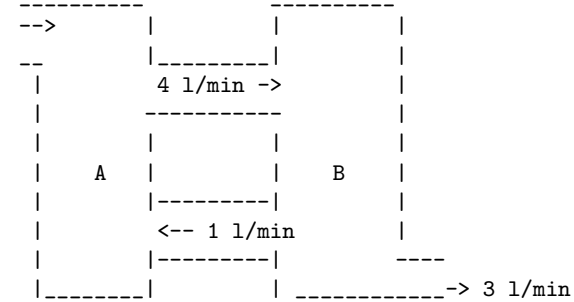
$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ a) alkuehdolla $\mathbf{v}(0) = [1, 0]'$

b) alkuehdolla $\mathbf{v}(0) = [0, 1]'$

c) Piirrä pplane5-piirroksia, katsele niin faasitaso kuin aikakuvaa (time series)

4. Kaksi säiliötä, A ja B sisältää 50l nestettä kumpikin. Niitä yhdistää kaksi putkea siten, että $A \rightarrow B$ virtaa nestettä nopeudella 4 l/min ja $B \rightarrow A$ 1 l/min ja oletetaan, että neste sekoittuu heti. Puhdasta vettä virtaa säiliöön A nopeudella 3 l/min ja säiliöstä B poistuu nestettä niinkään nopeudella 3 l/min. Oletetaan, että alkuhe tkellä säiliö A sisältää 25 kg suolaa ja säiliö B pelkkää vettä. Määritä suolamäärät kummassakin säiliössä ajan funktiona. Hahmottele ratkaisukäyrä faasitasossa, eli (x_1, x_2) -tasossa, pitämällä siis aikaa t käyräparametrina.

3 l/min



Miten pitkän ajan kuluttua suolamäärät säiliöissä ovat yhtäsuuret? Piirrä $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ aikariippuvuuskuvarana (“time series”) ja faasitasokäyränä. (Ilman pplane5:n apua, muuten saat käyttää Matlabia tai Maplea.)

Loppuviikko

1. Laode s. 174, teht. 8 Piirrä tässä ja seuraavassa (ja muissakin vastaavissa) ratkaisutrajektoriparvia luennolla hahmoteltua Matlab-skriptiä kehitellen.
2. Laode s. 174, teht. 9
3. Laode s. 225, teht. 19
4. Laode s. 234 jokin teht. 4–7 (valitse vapaasi (ja mielenkiintoisesti)).
5. BdiP s. 390 teht. 29. Lisäksi voit kokeilla aniaamtiota tyyliin msvarahtely2.mws (mutta älä tuhlaa koko ATK-keskuksen CPU-resursseja (*Juho!*))
6. BdiP s. 389 teht. 26
7. BdiP s. 397 teht. 9

Matriisin diagonalisointi

Jos $n \times n$ - matriisilla on n LRT ominaisvektoria, niin se on diagonalisoituvaa. Diagonalisointi (jos mahdollista) tarkoittaa matriisien X , D ja X^{-1} määrittämistä siten, että $A = XDX^{-1}$.