Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2000
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 8 (viikko 45 , 7 – 9.11)

2. välikokeen alueeseen kuuluvat harj. 5 – 8. Koepaperissa on mukana niin Laplace- kuin z-muunnostaulukko.

Alkuviikko

z-muunnoksia koskevat tehtävät on hyvä laskea käsin ja tarkistaa Maplella.

Esim: `ztrans(a^k,k,z);`

1. (a) Kirjoita auki yleinen ratkaisukaava 2. kertaluvun vakiokertoimiselle yhtälölle tapauksessa, jossa karakteristisen yhtälön juuret ovat kompleksiset: $\alpha \pm i\beta$. Merkitse ulkoista voimaa (herätettä) $u(t)$:llä ja alkuarvoja: x_0:lla ja v_0:lla. Käytä konvoluutiota hyväksi.

   (b) Sovella kaavaasi (vanhaan tuttuun) alkuarvotehtävään $\begin{cases} x'' + 4x' + 13x = \cos t \\ x(0) = 1, x'(0) = 1 \end{cases}$

   (Harjoituksen 3 tehtävään 4 (av) nähden vain alkuehdoissa on pieni muutos.)

2. Määritä z-muunnos ja suppenemisalue seuraaville jonoille:
   a) $\{(\frac{1}{4})^k\}$ b) $\{(-3)^k\}$ c) $\{3k\}$

3. Jatkuva-aikasignaalista $f(t) = e^{-2\omega t}$ $(\omega \in \mathbb{R}, t > 0)$ otetaan näytteitä T:n välein. Kirjoita näytejonon yleinen termi ja muodosta jonon z-muunnos.

4. Johda $\mathcal{Z}\{\sin k\omega T\}$, missä ω ja T ovat vakioita. (Katso tarvittaessa mallia exa 3.5:stä.)

5. Käytä 1. siirto-ominaisuutta jonon $\{y_k\}$ z-muuntamiseen, kun $y_k = \begin{cases} 0, k < 3 \\ x_k, k \geq 3 \end{cases}$, missä $x_k = (\frac{1}{2})^k$.

   Laske myös suoraan määritelmän mukaan $\mathcal{Z}\{y_k\}$

6. (a) Muodosta kausaalinen jono (x_k), jolla ei ole z-muunnosta (eli sarja hajaantuu kaikilla $z \in \mathbb{C}$.)

   (b) Todista z-muunnoksen kertomisominaisuudet (3.19) ja (3.20) sekä alkuarvolause (3.21) eli kohdat (i), (ii) ja (iii) s. 228 .

Loppuviikko

1. Laplace-muunnosta voidaan soveltaa matriiseihin ja vektoreihin alkioittain aivan kuten derivointia ym. Tätä formalismia käyttäen saadaan aivan henkeäsalpaavan kaunis kaava:

   $$L\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}.$$

   Siten e^{At} voidaan muodostaa myös laskemalla karakteristisen matriisin (miinus-merkkisen) käänteismatriisi ja käänteismuuntamalla se.

   Ratkaise tätä hyväksi käyttäen AA-tehtävä

   $$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Muista myös pysähtyä vertaamaan e^{At}:tä `exponential(A,t)`- tulokseen.

   Muistathan `map(laplace,fmat,t,s);` jne.

   Tarkemmin sanottuna tehtävässä olisi sopivaa tehdä kaksi asiaa:

   1) Soveltaa luennolla johdettua kaavaa yhtälöön $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$, jolloin ratkaisu saadaan käänteismuuntamalla $\mathbf{X}$ kaavassa $\mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1}(\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}(s))$

   2) Laskea e^{At} yllä olevalla kaavalla, verrata ja ihastella.

2. Muodosta vakiojonon $x_k = 1$ z-muunnos ja kertosääntöjä (3.19), (3.20) käyttäen jonojen $\{(\frac{1}{2})^k\}$, $\{k(\frac{1}{2})^k\}$,… $\{k^6(\frac{1}{2})^k\}$,….

   Käytä Maplea derivointiin. Voit tietysti tarkistaa `ztrans`:lla. Piirrä huvin vuoksi z-muunnosfunktioiden kuvajaat (rajoittumalla reaaliakseliin).

3. Määritä seuraavien funktioiden z-käänteismuunnokset:
   (a) $\frac{z+2}{z+1}$ (b) $\frac{z}{(z-1)(z+2)}$ (jaa ensin z:lla ja sitten osamurto) (c) $\frac{z}{z^2+1}$
   (d) $1 + \frac{3}{z^2} - \frac{2}{z^9}$ (e) $\frac{2z^3+6z^2+5z+1}{z^2(2z+1)}$

Huomaa, että jos sarjakehitelmä $\frac{1}{z}$:n potenssien suhteen jotenkin "paistaa läpi", niin homma on harvinaisen helppo.

4. Oletetaan, että olet ostamassa asuntoa ja pyydät pankista lainaa. Takaisinmaksu suoritetaan kuukausittain maksettavin vakioeräisin maksuin (annuiteetti). Kokonaislaina-aika olkoon 30 vuotta.

   a) Miten suuren lainan voit ottaa, jos maksimikuukausierä, jolla pysyt hengissä, on 800 mk.

   b) Kuinka paljon kuukausierää tulee nostaa, jos haluatkin maksaa lainan 20 vuodessa.

   Oletetaan, että korkoprosentti on 5.5.

   Voit tehdä Maple-työarkin, jossa nimeät ensin kaikki asiaan vaikuttavat parametrit, niitä voit tarpeen tullen muutella.

   Vaikka tehtävä on helppo ratkaista muutenkin, käytä z-muunnosta, ehkäpä se tekee pankinjohtajaasi suuren vaikutuksen.

   Voit keksiä muitakin asiankuuluvia kysymyksiä, kuten korkoprosentin muutoksen vaikutus ym.

5. Ratkaise z-muunnoksen avulla seuraavat differenssiyhtälöt:

   (a) $6y_{k+2} + 5y_{k+1} - y_k = 5$, ehdoilla $y_0 = y_1 = 0$.

   (b) $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 3y_n = 1$, ehdoilla $y_0 = 1, y_1 = 0$.

   (c) $y_{n+2} - 4y_n = 3n - 5$, ehdoilla $y_0 = y_1 = 0$. Tee käsin Maple-avusteisesti ja lisäksi automaattisemmin (samaan tyyliin kuin tehtiin L-muunnosten yhteydessä). Piirrä aikakuvat (murtoviivat).

   Pisteitä yhdistävien murtoviivojen piirtohan tapahtuu näin:

   `plot([seq([k,yy(k)],k=0..10)]);` (Lista, jonka alkioina ovat ao. pisteet esitettyinä koordinaattiparien listoina `[x,y]`.)

6. Henkilö H päättää perustaa firman F. F:n pääoma vuoden k alussa olkoon C_k ja vuoden k kulut olkoot yhteensä E_k. Liiketoiminnan tuloksena pääoma ja kulut kehittyvät seuraavasti:

$$\begin{cases} C_{k+1} = 1.5C_k - E_k \\ E_{k+1} = 0.21C_k + 0.5E_k \end{cases}$$

   (a) Osoita, että pitkän ajan kuluessa F:n pääoma kasvaa 20 %:n vuositahtia.

   (b) Jos pääoma 1. vuoden alussa on 12000 mk ja 1. vuoden kulut ovat 7440 mk, määritä vuosi, jolloin kulut ovat minimissä ja pääoma sen vuoden alussa.

   Piirrä sekä aika- että "faasi"kuvat.

Maple-ohjeita

Differenssiyhtälö:

Esim: `> a*y(k+2)+b*y(k+1)+c*k=u(k);`

Z-muunnosta voi soveltaa, kuten Laplace-muunnosta, samanlaiset vaiheet. (Ei tarvitse ladata mitään.)
Suositus: `alias(Z=ztrans,IZ=invztrans);`

Black box: `rsolve` (vrt. `dsolve`)

- evalc tekee usein hyvää jälkeä kompleksiluvun re-ja im-osiin jaossa. Kokeile: `evalc(exp(I*phi));`
- Tämän tyyliset kannattaa ottaa käyttöön. "symbolic" siirtää kaiken vastuun sievennysten pätevyysalueesta käyttäjälle, usein ihan hyvä. `combine(%,ln,anything,symbolic); simplify(%,ln,symbolic);`
- Osamurtohajoitelmissa kannattaa z-muunnostehtävissä aina mennä 1. asteen tekijöihin, ts. otetaan kompleksiluvut käyttöön. Jotta Maple suostuu, on tehtävä vastaavasti kuin tehtiin siinä $\sqrt{41}$- tehtävässä. Annetaan Maplen hakea tekijöihinjakoa laajennetussa "kunnassa". Tässä tapauksessa ilmoitetaan, että I on mukana:

  `lauseke:=convert(lauseke,parfrac,z,I);`
- z-käänteismuunnos saadaan suoraan funktiosta kehittämällä se $\frac{1}{z}$:n potenssien suhteen, kuten ylempänä todettiin. Maplessa voidaan series komennolla tämä saada aikaan tähän tyyliin:

  `series(F,z=infinity,10)`