Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2000
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 4 (viikko 41 , 10–12.10)

Otetaan tällä kertaa systeemillä AV=4, LV=7. Harj 1 – 4 kuuluvat 1. välikokeen aihepiiriin.

Matlab- ja Maple-apuvälineitä:

```
www.math.hut.fi/teaching/v/3/L/L6.html  Matlab-skripti trajektoriparviin
www.math.hut.fi/teaching/v/3/L/Lmaple6.html  Maple-työskentelyä
www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/ratk/harj4av.html  -- '' --
```

Alkuviikko

1. Laske kiertomatriisin $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

   Ominaisarvot ja -vektorit. Saadaanko millään kiertokulman arvoilla reaalisia ja jos, niin millä?

2. Diagonalisoi matriisi A tai perustele diagonalisoitumattomuus, kun

   a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

   Tee diagonalisoituvan tapauksen suhteen johtopäätös, että ominaisarvot voivat olla erilliset, vaikka matriisi ei olekaan symmetrinen. Ovatko ominaisvektorit ortogonaaliset?

3. Ratkaise systeemi $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, missä

   $A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ a) alkuehdolla $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = [1, 0]'$

   b) alkuehdolla $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = [0, 1]'$
   c) Piirrä pplane5-piirroksia, katsele niin faasitaso kuin aikakuvaa (time series)

4. Kaksi säiliötä, A ja B sisältää $50l$ nestettä kumpikin. Niitä yhdistää kaksi putkea siten, että $A \to B$ virtaa nestettä nopeudella 4 l/min ja $B \to A$ 1 l/min ja oletetetaan, että neste sekoittuu heti. Puhdasta vettä virtaa säiliöön A nopeudella 3 l/min ja säiliöstä B poistuu nestettä niinikään nopeudella 3 l/min. Oletetetaan, että alkuhe tkellä säiliö A sisältää 25 kg suolaa ja säiliö B pelkkää vettä. Määritä suolamäärät kummassakin säiliössä ajan funktiona.

```
3 l/min

----------          ----------
-->       |         |          |
--        |_________|          |
 |         4 l/min ->          |
 |        -----------          |
 |        |         |          |
 |    A   |         |    B     |
 |        |---------|          |
 |         <-- 1 l/min         |
 |        |---------|         ----
 |________|         | ____________-> 3 l/min
```

Miten pitkän ajan kuluttua suolamäärät säiliöissä ovat yhtäsuuret? Piirrä $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ aikariippuvuuskuvana ("time series") ja faasitasokäyränä eli (x_1, x_2)-tasossa, pitämällä aikaa t käyräparametrina . (Ilman pplane5:n apua, muuten saat käyttää Matlabia tai Maplea.)

Loppuviikko

1. Laode s. 174, teht. 8 Piirrä tässä ja seuraavassa (ja muissakin vastaavissa) ratkaisutrajektoriparvia luennolla hahmoteltua Matlab-skriptiä kehitellen.
2. Laode s. 174, teht. 9
3. Laode s. 225, teht. 19
4. Laode s. 234 jokin teht. 4–7 (valitse vapaasi (ja mielenkiintoisesti)).
5. BdiP s. 390 teht. 29. Lisäksi voit kokeilla aniaamtiota tyyliin msvarahtely2.mws (mutta älä tuhlaa koko ATK-keskuksen CPU-resursseja (*Juho!*)
6. BdiP s. 389 teht. 26
7. BdiP s. 397 teht. 9

Matriisin diagonalisointi

Jos $n \times n$- matriisilla on n LRT ominaisvektoria, niin se on diagonalisoituva. Diagonalisointi (jos mahdollista) tarkoittaa matriisien X, D ja X^{-1} määrittämistä siten, että $A = XDX^{-1}$.