Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2000
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 3 (viikko 40 , 3–5.10)

Alkuviikko

Tällä kertaa vain 5 tehtävää (painokerroin $\frac{6}{5}$).

1. Johda (vaimentamattoman) harmonisen värähtijän ratkaisun $x(t)$ kaava, kun alkuehtoina käytetään yleisiä symboleja $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$. Merkitse normaaliin tapaan $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ja yhtälöhän on $mx'' + kx = 0$.

   Saata kaava myös muotoon $x(t) = C\cos(\omega_0 t - \delta)$ (eli määritä C:n ja δ:n lausekkeet x_0:n,v_0:n ja ω_0:n avulla.

2. 100:n gramman massa venyttää jousta 5 cm. Massa pannaan liikkeelle antamalla sille tasapainoasemassa alaspäin suuntautuva alkunopeus 10 m/s. Ei ilmanvastusta, ei kitkaa. Määritä massapisteen asema $x(t)$ ajan funktiona. Milloin massapiste sivuuttaa ensimmäisen kerran tasapainoasemansa? Kuinka monta värähdysjaksoa syntyy minuutissa?

3. Kuution muotoinen kappale (sivu = l, tiheys = ρ) kelluu nesteessä, jonka tiheys $\rho_0 > \rho$. Kappaletta painetaan hieman tasapainoasemasta ja päästetään irti, jolloin se alkaa värähdellä pystysuunnassa. Jätetään kaikki vastusvoimat huomiotta.

   Johda liikkeen differentiaaliyhtälö ja määritä värähtelyn taajuus.

   Ohje: Jos kappale sijaitsee syvyydellä $x(t)$ tasapainoasemasta mitattuna, niin siihen vaikuttaa *Archimedeen lain* mukainen noste, joka on $x(t)$ -korkuisen nestemäärän paino. (“Tasapainonoste” ja kappaleen paino kumoavat toisensa.)

4. Ratkaise alkuarvotehtävä $\begin{cases} x'' + 4x' + 13x = \cos t \\ x(0) = 0, x'(0) = 1 \end{cases}$

   “reseptin mukaan”
   1) Homog. yht. (HY) karakt. yht. avulla
   2) Yrite y_p epähomogeeniyhtälön (EHY) erityisratkaisun löytämiseksi.
   3) Integroimisvakiot alkuehdoista.

5. Johda vaimentamattoman pakkovärähtelyn resonanssitapauksessa ($\omega = \omega_0$) EHY:n erityisratkaisu [1] lähtemällä yritteestä $x_p(t) = t(a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t)$. Miten amplitudi käyttäytyy, kun $t \to \infty$. Havainnollista kuvin.

Loppuviikko

Ns. projektitehtävät arvioidaan asteikolla 1..2 (aivan erityisansiokkaasta voidaan myöntää 3), jos 1 tarkoittaa tavallista laskarirastia.

1. Nimeä AV:n tehtävän 4 tasapainotilaratkaisu (“steady state”), siirtymätilaratkaisu (“transient”) ja piirrä ne sekä erikseen että yhdessä. Väritä ja selitä.

2. MP Tämä on miniprojekti 2:lle H:lle.

   Tarkastellaan vapaan vaimennetun värähtelyn diffyhtälöä

   $$mx'' + cx' + kx = 0$$

   Olkoot m:llä ja k:lla kiinteät arvot $m = 9.082kg$, $k = 890N/m$. Vaihdellaan c:tä seuraavasti:

   (I) $c = 200kg/s$, (II) $c = 179.8kg/s$, (III)$c = 100kg/s$

   Ratkaise kussakin tapauksessa (AA)-tehtävä $x(0) = 0.15m$, $x'(0) = 0$.

   Havainnollista kuvin ja vertaa värähtelytapauksessa (kvasi)frekvenssiä vastaavan harmonisen värähtelyn frekvenssiin.

   Tarkoitus on, että toinen tekee Maplella ja toinen Matlabilla. Maple-ws olisi hyvä muuntaaa html:ksi ja Matlab-osuuden doku voisi olla tyyliä ratk/harj2.html, jossa kuvat saa mukavasti xv:llä.

   Huomaa, että tapauksessa II tulee käytännössä pieni imaginaariosa, joka käsitellään panemalla se 0:ksi.

   Ratkaisut on syytä tehdä yleispäteviksi niin, että parametreja muuttelemalla saadaan kaikki maailman tämän tyylin tehtävät ratkotuksi.

3. PP: pikku projekti 2:lle

   Saa rajoittua yhteen ohjelmaan.

   Tarkastellaan alkuarvotehtävää

   $$x'' + cx' + x = 0, \quad x(0) = 2, x'(0) = 0,$$

   missä vaimennuskertoimella c on aluksi vaikkapa arvo $c = 0.25$.

   Määritä ja piirrä ratkaisu $x(t)$ ja määritä aika t_0, josta lähtien ratkaisu on “mitättömän pieni”, voit itse asettaa kriteerin.

[1] EHY = Epähomogeeniyhtälö

Toista sama muutellen vaimennuskerrointa välillä $(0,2)$. (Kenties n. 5 eri c:n arvoa on sopiva määrä.)

Piirrä datapisteet ja sovita niihin splini esittämään t_0:n riippuvuutta c:stä. (Maplessa `readlib(spline), ?spline`, Matlabissa `help spline`)

4. PP: pikku projekti 2:lle

   Saa rajoittua yhteen ohjelmaan.

   Vaimennetun, pakotetun värähtelyliikkeen diff. yhtälö on

   $my'' + cy' + ky = r(t)$

   missä m =massa, c =vaimennusvakio ja k =jousivakio ja $r(t)$ edustaa ulkoista pakkovoimaa.

   Olkoot mainituilla parametreillä arvot $m = 1, c = 4, k = 24, r(t) = 10\cos(\omega t)$.

   Määritä kulmataajuus ω siten, että tasapainotilaratkaisulla "steady-state" on maksimaalinen amplitudi. Havainnollista kuvalla, johon piirrät mainitun TT- (ss-) ratkaisun amplitudin ω:n funktiona.

   Piirrä tämä maksimaalinen TT-ratkaisu, sekä muutamia muilla ω:n arvoilla saatavia.

5. HPP: hauska pikku projekti 2:lle

   Ratkaise AA-tehtävä $x'' + x = \cos\omega t$, $\omega \neq 1$, $x(0) = 0, x'(0) = 0$. Osoita, että ratkaisu voidaan saattaa muotoon:

   $$x(t) = \frac{2}{1-\omega^2}\sin\frac{(1+\omega)t}{2}\sin(\frac{(1-\omega)t}{2}$$

   Muuttele (älykkäästi) ω:aa ja selvittele sen vaikutusta vastekäyrään (ratkaisuun). Pysähdy erityisesti tarkastelemaan "huojunta-ilmiötä, beats" sekä resonanssia. Anna sitten mennä yli resonanssitaajuuden ja katso mitä tapahtuu isoilla ω-taajuuksilla.

6. YHP Ylimääräinen huvitteluprojekti Ota käyttöösi *Mika Spåra*:n tekemä Maple-ws `...H/msvarahtely.mws` (liittyy *Simo Kivelän* `MatTa-` projektiin `http://www.math.hut.fi/matta/`) värähtelevän jousen animaatiotarkoituksessa. Kokeile sitä johonkin/joihinkin aiempiin tehtäviin.