## Koordinaattikuvaus ja isomorfismi

Käyty läpi luennolla, mutta kirjoitinpa nyt oikein LATEX:lla.

Tämä teksti liittyy harjoituksen 3 aiheisiin. Samalla käsittelemme periaatetta, isomorfiaa, joka on kaikessa matematiikassa kantava yleinen ajatustapa.

Hyvä esitys: *Lay*: LA, Ch. 4.4 s. 250 – 251.

Olkoon $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ vektoriavaruuden $V$ kanta.

**Lause** Kuvaus $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ on linearinen bijektio $V \mapsto \mathbb{R}^n$.

**Selitys:** Annettu vektori $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1, \ldots, x_1\mathbf{b}_n$ määrää yksikäsitteisen koordinaattivektorin $(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ (yksikäsitteisen, koska $\mathcal{B}$ on kanta).
Niinpä voidaan määritellä kuvaus

$$\mathbf{x} \mapsto (x_1, \ldots, x_n) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}.$$

**Tod:** (1) **Lineaarisuus**: Olkoot $\mathbf{u} = c_1\mathbf{b}_1 + \ldots + c_n\mathbf{b}_n$,
$\mathbf{v} = d_1\mathbf{b}_1 + \ldots + d_n\mathbf{b}_n$.

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{b}_1 + \ldots + (c_n + d_n)\mathbf{b}_n$,

joten

$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 + d_1 \\ \vdots \\ c_3 + d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$;

$$\alpha[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \alpha \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha c_1 \\ \vdots \\ \alpha c_3 \end{bmatrix} = [\alpha\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}.$$

(2) **Injektio:** Ts. osoitettava : ydin, eli nolla-avaruus on pelkkä nollavektori $\{0\}$.

Olkoon $\mathbf{u} \in V$ siten, että $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Tällöin $\mathbf{u} = 0\mathbf{b}_1 + \ldots + 0\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$.

(3) **Surjektio** (eli kuva-avaruus $R(T) = \mathbb{R}^n$).
Olkoon $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n$. Alkukuva $\mathbf{u}$ löydetään välittömästi määrittelemällä

$\mathbf{u} = d_1\mathbf{b}_1 + \ldots + d_n\mathbf{b}_n$.

Tällöinhän $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = (d_1, \ldots, d_n)$.

QED

**Huom!** Kaikki kohdat olivat aivan välittömiä seurauksia määritelmistä. Ainoa “vaativa” asia oli itse kuvauksen määrittely, jossa tarvitaan kantaesityksen yksikäistteisyys.

Koordinaattikuvaus $u \mapsto [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$ on esimerkki vektoriavaruus**isomorfismista**.

Sen välityksellä voidaan samaistaa $V \leftrightarrow \mathbb{R}^n$.

Kaikki VA-ominaisuudet siirtyvät. (Muista myös: lineaarikuvauksen käänteiskuvaus on lineaarinen (mikäli kuvaus on bijektio, eli käänteiskuvaus on olemassa).)

Keskenään isomorfisia avaruuksia ei voida vektoriavaruusominaisuuksien perusteella mitenkään toisistaan erottaa. Kaikki laskut voidaan siirtää tehtäviksi toisessa “realisaatiossa” ja palauttaa lopuksi takaisin alkuperäiseen.

Kyse on täsmälleen samasta asiasta hieman erilaisen matemaattisen struktuurin suhteen, kuin esim. AG-kirjan kompleksilukujen määrittelyn yhteydessä on selostettu.

Kreikankieliset sanat: *”iso” = sama*, *“morph” = muoto, rakenne.*

Esimerkiksi ominaisuus “olla kanta” säilyy, koska lineaarinen vektoriyhtälö säilyy lineaarisena vektoriyhtälönä samoin kertoimin, ja nolla-alkiot vastaavat yksikäsitteisesti toisiaan, eli ominaisuus “olla nolla” vastaa samaa ominaisuutta toisella puolella kuvausta.

Erityisesti siis

$$\{\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n\} \text{ on } \texttt{LRT} \iff \{[\mathbf{v}_1]_\mathcal{B} \ldots [\mathbf{v}_n]_\mathcal{B}\} \text{ on } \texttt{LRT} \,.$$