www.math.hut.fi/teaching/v/3/02/KOE/vk3teht4ratk.pdf

Välikoe 3, tehtävä 4, V3 syksy 2002

Muutama sanamuoto voi olla tuttu tiedostosta L18aalto.pdf .

Aaltoyhtälö

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Reunaehdot (RE): $u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0$ (Päät ovat paikallaan aina.)
Alkuehdot:
AE$_1$: $u(x,0) = f(x)$ (annettu alkupoikkemaprofiili)
AE$_2$: $u_t(x,0) = g(x)$ (annettu alkunopeusprofiili).

Annetut (reuna-)arvot ja (alku)funktiot: $L = 2, \quad c = 2,\ f(x)$ on annettu (ja toivottavasti kehitetty Fourier-sarjaksi) tehtävässä 3, $g(x) = 0$.

Askel 1, osittaisdiffyhtälö hajoaa kahdeksi tavalliseksi

Yrite: $u(x,t) = F(x)G(t)$. Sijoitetaan diffyhtälöön, saadaan:

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t).$$

jaetaan tulolla $F(x)G(t)c^2$, jolloin saadaan

$$\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Tämä on mahdollista vain, jos molemmat puolet ovat = sama vakio, sanokaamme k.

Askel 2, reunaehdot

$u(0,t) = F(0)G(t) = 0, u(L,t) = F(L)G(t) = 0 \ \ \forall t > 0$, missä $L = 2$.

Tästä seuraa: $F(0) = 0, \quad F(2) = 0$. (Muussa tapauksessa olisi $u(x,t) \equiv 0$.)

Jos olisi $k \geq 0$, saataisiin F-yhtälön ratkaisuksi 1. asteen polynomi tai exp-funktioiden lineaarikombinaatio, jolloin RE:t johtaisivat vääjäämättä nollaratkaisuun. Tätäkään ei vaadita todettavaksi tehtävässä, vaan voidaan tehtävän ohjeen mukaan ottaa $k = -p^2$.

Diffyhtälöt ovat siten:

$$\begin{cases} F''(x) + p^2 F(x) = 0 \\ G''(t) + c^2 p^2 G(t) = 0 \end{cases}$$

Siispä $F(x) = A \cos px + B \sin px$.

Reunaehdoista seuraa siis: $0 = F(0) = A$, joka toiseen RE:oon yhdistettynä antaa $0 = F(2) = B \sin px$.

Koska B ei voi olla 0 (muuten triv. ratk.), on oltava $p2 = n\pi$

Siten ainoat mahdolliset p:n arvot ovat $p = \frac{n\pi}{2}$.

Kaikki mahdolliset diffyhtälön ja RE:t toteuttavat ("separoituvat") ratkaisut ovat siten muotoa

$$u_n(x,t) = \sin \frac{n\pi x}{2} G(t),$$

missä $n = 1, 2, 3, \ldots$ ja missä $G(t)$ toteuttaa G-yhtälön. Tässä valittiin B-kerroin 1:ksi, sillä se voidaan yhdistää $G(t)$:n kertoimiin, kuten kohta nähdään.

G-yhtälön ratkaisut

G-yhtälö: $G''(t) + c^2 p^2 G(t) = 0$, missä $cp = \frac{cn\pi}{2} = n\pi. \quad (c = 2)$

Yleinen ratkaisu: $G_n(t) = B_n \cos n\pi t + B_n^* \sin n\pi t$.

Siten tehtävän (diff. yht + RE:t) ratkaisuja ovat funktiot

$u_n(x,t) = B_n \sin \frac{n\pi x}{2} (\cos n\pi t + B_n^* \sin n\pi t)$.

Yksinkertaistavasta toisesta AE:sta seuraa heti: $B_n^* = 0$ (derivoidaan t:n suhteen ja sijoitetaan $t = 0$).

Näin olemme saaneet funktioperheen, jonka kaikki jäsenet toteuttavat diffyhtälön ja RE:t sekä lisäksi jälkimmäisen AE:n. Tässä se on:

$u_n(x,t) = B_n \sin \frac{n\pi x}{2} \cos n\pi t.$

Vapaasti valittavia parametreja on kutakin n:n arvoa kohti kerroin B_n.

Askel 3, 1. alkuehto

Vielä olisi saatava toteutumaan:

AE_1: $u(x,0) = f(x)$

Ensinnäkin, diffyhtälö on lineaarinen, joten $\sum u_n(x,t)$ toteuttaa diffyhtälön. Lisäksi se tot. RE:t ja toisen AE:n , koska nämä kaikki ovat homogeeniset (arvoina 0).

Kun termeittäin derivointi on sallittua, voidaan tämä ulottaa myös äärettömälle summalle, jolloin AE_1 merkitsee vaatimusta:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

Vielä meillä on takataskussamme vapaasti valittavat B_n-kertoimet. Ehtomme toteutuu siten valitsemalla B_n-kertoimet alkuehtofunktion sinisarjan kertoimiksi, ts. f:n puolen jakson pariton laajennus kehitetään Fourier-sarjaksi.

Ratkaisu tehtävään on siis:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{2} \cos n\pi t,$$

missä kertoimet B_n ovat tehtävässä 3 (oikein) lasketut b_n-kertoimet.