Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3, s 2002

Apiola/Ebeling

3. välikoe 12.12. 2002

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

1. Laske määritelmän perusteella *Heavisiden* (siirretyn) funktion $u(t-a), \quad a \geq 0$ Laplace- muunnos. Millä reaalisilla s:n arvoilla muunnosfunktio $F(s)$ on määritelty ?

2. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen alkuarvotehtävä

$$y'' + 9y = \begin{cases} 8\sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & t > \pi, \end{cases}$$

   $y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$

3. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 1 \\ \frac{2-x}{2}, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

   (a) Piirrä f:n parittoman jatkon 4-jaksoisen jatkon kuvaaja välillä $[-4, 4]$.

   (b) Muodosta (a)-kohdan tavoin jatketun funktion Fourier-sarja, ja selvitä sen suppenemiskäytös koko $\mathbb{R}$:ssä. Kertoimen yleisen lausekkeen saat jättää muotoon, jossa esiintyy tyyppiä $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ tms. olevia termejä. Kirjoita kuitenkin auki sarjan osasumma, jossa on 5 ensimmäistä termiä.

   Vihje: Sievennä ensin ja ala vasta sitten integroida, voit säästää vaivaa.

4. Tarkastellaan päistään kiinnitettyä värähtelevää kieltä, jonka pituus $L = 2$, ja olkoon aaltoyhtälön vakio $c = 2$. (aaltoyhtälö annettu alempana). Olkoon alkunopeus $u_t(x, 0) = 0$ ja alkupoikkeama $u(x, 0) = f(x)$, missä f on tehtävän 3 funktio.

   Käy läpi muuttujanerotteluprosessi aaltoyhtälön ratkaisemiseksi, eli lähde liikkeelle yritteestä $u(x, t) = F(x)G(t)$.

   Riittää, kun otat "muuttujanerotteluvakioksi" k suoraan negatiivisen luvun, jota voit merkitä vaikkapa $k = -p^2$.

   Huom! Tehtävän 3 mahdollisista virheistä ei tietenkään sakoteta tässä uudestaan. Tärkeintä on, että osoitat ymmärtäväsi menetelmän ajatuksen.

Laplace-muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \quad \mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad \mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Osamurtokehitelmät

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s - a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{s-a}$.
2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bs + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.
3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1s+C_1}{s^2+bs+c} + \ldots + \frac{B_rs+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$

Käännä!

Trigonometriaa

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

Fourier-sarja

$2L$-jaksoisen funktion f Fourier-sarja:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Aaltoyhtälö

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Palaute ja toivotukset

Pyytäisin vielä viimeisenä palveluksena palautelomakkeen täyttöä niiltä, jotka eivät ole tähän mennessä www-palautetta lähettäneet.

Ja sitten ... Hyvää uutta vuotta ja tulevia uusia vuosia ja onnea ja menestystä elämän varrella!

t. *Heikki*