Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3

Apiola

Tentti 5.4.2003

Sallittu: funktiolaskin

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

1. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
   nolla-avaruuden *Nul(A)* ja sarakeavaruuden *Col(A)* kanta.

2. Muodosta matriisin $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$
   sarakeavaruudelle ortogonaalinen kanta *Gram–Schmidt'n* menettelyllä.

3. Ratkaise alkuarvotehtävä ("AA-tehtävä") $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = (-1, -1)$, kun
   $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.
   Selvitä kriittisen pisteen $\mathbf{0}$ luonne (lähde, nielu, satula tms.) ja stabiilisuuskäytös, sekä piirrä kuvaan ominaisvektorit, edellä laskettu AA-ratkaisutrajektori, sekä muutama muu trajektori (hahmotellen). Varusta ominaisvektorit ja piirtämäsi trajektorit kasvavan ajan mukaan etenevin suuntanuolin.

4. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen alkuarvotehtävä
   $$y'' + 2y' = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1, \end{cases}$$
   $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

5. Piirrä funktion $f(x) = \sin x, \quad x \in [0, \pi]$ parillisen laajennuksen kuvaaja välillä $[-\pi, \pi]$ ja kehitä se *Fourier*-sarjaksi, ts. muodosta f:n kosinisarja.

Laplace-muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0)$, $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, $\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), (f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Osamurtokehitelmät

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s - a$, otetaan kehitelmään termi

$\frac{A}{s-a}$.
2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bs + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.
3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1 s+C_1}{s^2+bs+c} + \ldots + \frac{B_r s+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$

Trigonometriaa, e^x:n sarja

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

Näistä saat käden käänteessä $\sin\alpha\cos\beta$ ym.-tyyppiset kaavat.

$e^x = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$.

Fourier-sarja

$2L$-jaksoisen funktion f Fourier-sarja:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$