Teknillinen korkeakoulu Apiola/Ebeling
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 9 (viikko 45 , 16–17.11.2002)

AV-harjoituksia ei pidetä, sensijaan pidetään ylimääräinen luento ti 12.11. klo 12-14. LV-tapahtumat ovat normaalisti to ja pe.

Loppuviikko (LV)

1. Laske määritelmän perusteella seuraavien funktioiden Laplace-muunnokset ja ilmoita muunnosfunktion määrittelyalue.
   Saat hyödyntää Maplea integroinneissa, mutta kirjoita kuitenkin ainakin jokunen osittaisintegrointikaava ensin käsin. Rajankäynnit tulee päätellä ilman Maplea.

   a) $f(t) = t^2$, b) $f(t) = te^{-t}$,

   c) $f(t) = \cos at$ d) $f(t) = \sin at$

2. Laske Laplace-muunnokset (samaan tyyliin kuin edellä).

   a) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1,2] \\ 0, & t \notin [1,2] \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

3. Laske s-siirtolausetta ("s-shift") hyödyntäen seuraavien funktioiden Laplace-muunnokset:

   (a) $f(t) = t^2 e^{3t}$, (b) $f(t) = 5e^{2t} \sinh 2t$, (c) $f(t) = \sinh t \cos t$.

4. Laske s-siirtolausetta ("s-shift") hyödyntäen seuraavien funktioiden käänteismuunnokset:

   (a) $F(S) = \frac{12}{(s-3)^4}$, (b) $F(s) = \frac{3}{s^2+6s+18}$.

5. Laske seuraavien funktioiden $F(s)$ Laplace-käänteismuunnokset

   a) $\frac{s+5}{(s+1)(s-3)}$ b) $\frac{2s+6}{s^2+4}$ c) $\frac{s+8}{s^2+4s+5}$

6. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla (AA)-tehtävä: $y'' + 2y' + 5y = 1$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$

7. Paloittain jatkuva funktio f on *exp-kertalukua*, jos on olemassa vakiot K, c, T siten, että

   $|f(t)| \le Ke^{ct}, \quad \forall t \ge T$

   a) Osoita, että e^{t^2} ei ole exp-kertalukua.

   b) Onko exp-kertalukua olevan funktion derivaatta exp-kertalukua. Vihje: tarkastele vaikkapa funktiota $f(t) = \sin(e^{t^2})$.

Laplace-muunnokset

Alla oleva taulukko ja nämä kaavat (+ joitakin lisäkaavoja) on koetehtäväpaperissa mukana.

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0)$, $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, $\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Laplace-muunnokset Maplella. Maple soveltuu tietysti integrointiapualiseksi. Lisäksi Maplessa on pakkaus `inttrans`, joka ladataan komennolla `with(inttrans):`. [HAM]-kirjassa on käsitelty Laplace-muunnoksia ss. 181–185 (luku 10). Peruskomennot ovat `laplace(f,t,s);` ja `invlaplace(F,s,t);` (Mieti argumenttien järjestyksen logiikka, se on olennaisen tärkeä tietenkin.)

Osamurtokehitelmät

Nämä myös koetehtäväpaperissa.

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s - a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{s-a}$.

2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bs + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.
3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1 s+C_1}{s^2+bs+c} + \ldots + \frac{B_r s+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$

Osamurto Maplella: `convert(F,parfrac,s);`