Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola/Ebeling

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 5 (viikko 42 , 15 – 18.10.2002)

Luentoaiheita: `... [TE], Lay`.

Alkuviikko (AV)

Ominaisarvotehtävissä oletamme aina ilman eri mainintaa, että puhe on neliömatriiseista. A (yms.) tarkoittaa tavallisimmin kokoa $n \times n$ olevaa matriisia.

1. Määritä matriisin A ominaisarvot ja muodosta kutakin ominaisarvoa vastaavalle ominaisavaruudelle jokin kanta, kun
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Mitkä ovat algebralliset ja geometriset kertaluvut?

2. Olkoon A:lla ominaisarvo λ, ja olkoon $\mathbf{x}$ jokin vastaava ominaisvektori.
(a) Osoita, että λ^k on A^k:n ominaisarvo.
(b) Oletetaan, että A on kääntyvä. Osoita, että λ^{-1} on A^{-1}:n ominaisarvo ja $y = Ax$ siihen liittyvä ominaisvektori (tai miksei myös x). Mistä tiedät, että $\lambda \neq 0$?

3. Olkoon T lineaarikuvaus, jonka geometrinen kuvailu on annettu seuraavissa eri kohdissa.
(a) Heijastus x-akselin suhteen tasossa $\mathbb{R}^2$,
(b) Venytys kertoimella 4 $\mathbb{R}^3$:ssa,
(c) Heijastus xy-taon suhteen $\mathbb{R}^3$:ssa,
(d) Kohtisuora projektio y-akselille tasossa,
(e) Kierto jonkin origon kautta kulkevan akselin ympäri määräkulman verran $\mathbb{R}^3$:ssa.
Selvitä laskematta, mitkä ovat kussakin tapauksessa ominaisarvot ja -vektorit. (LV-tehtävänä saat sitten laskea.)

4. Olkoon A 4×4- matriisi, jolla on ominaisarvot $5, 3$ ja -2, ja oletetaan, että tiedät ominaisarvon $\lambda = 3$ geometrisen kertaluvun $m_g(\lambda)$ olevan 2 (eli $\dim(E_A(2)) = 2$. Onko tässä tarpeeksi tietoa, jotta voit päätellä A:n diagonalisoituvaksi?

5. Olkoon $A = \begin{bmatrix} -2 & 12 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.
Diagonalisoi A ja laske sen avulla lauseke A^k:lle.

6. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. ominaisarvot ja ominaisvektorikanta $\mathbb{C}^2$:ssa.

Loppuviikko (LV)

1. Olkoon $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineaarikuvaus, jonka matriisi luonnollisen kannan suhteen on
$$A = \begin{bmatrix} 15 & -66 & -44 & -33 \\ 0 & 13 & 21 & -15 \\ 1 & -15 & -21 & 12 \\ 2 & -18 & -22 & 8 \end{bmatrix}.$$
Määritä $\mathbb{R}^4$:n kanta $\mathcal{F}$, jonka suhteen T:n matriisi $[T]_{\mathcal{F}}$ on diagonaalinen ja muodosta tuo diagonaalimatriisi.
Saat käyttää `Eigenvectors`:ia.

2. Muodosta AV-tehtävän 3 kohtien (a), (c) ja (e) matriisit ja laske ominaisarvot ja -vektorit. Laske ainakin yksi kohta käsinlaskua simuloiden (karakterisitinen polynomi, ym.), lopu(i)ssa saat halutessasi käyttää `Eigenvectors`:ia. Kohdan (e) akseliksi voit ottaa z-akselin ja kiertokulmaksi esim. $\phi = \frac{\pi}{4}$.

3. Muistele harj. 4 LV tehtävää 5. Käsittele vapaavalintaisesti kohdan (a) tai (b) matriisia. Selitä, miksi käytös on sellaista, miltä näyttää. Onko nollasta erillinen tasapainopiste yksíkäsitteinen, jos lähtöpiste on todennäköisyysvektori?
Evästys: Lausu lähtöpiste ominaisvektorikannassa tai suorita diagonalisointi.

4. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Diagonalisoi A.

   (b) Esitä reaalimuodossa $A = PCP^{-1}$, missä $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

5. Havainnollista tehtävien 2 ja 4 lineaarikuvauksia animaatiolla tyyliin `L7maple, L8maple`. Piirrä joissain tapauksissa nuolien sijasta myös ratakäyrät: sininen yksikköympyrä ja punainen kuvakäyrä.

6. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1.07 \end{bmatrix}$.

   Määritä ominaisarvot ja -vektorit (`Eigenvectors`) ja tunnista matriisin rakenne.

   Muodosta jonot $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k, k = 0, 1, \ldots$, missä alkupiste $\mathbf{x}_0$ on (a) $(2, 0, 0)$ ja (b) $(2, 0, 1)$. Piirrä pisteiden ratakäyriä ("trajektoreja") $\mathbb{R}^3$:ssa.

   Ohje: `spacecurve` (Tarvitaan `with(plots):`)