Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola/Ebeling

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 4 (viikko 41 , 8 – 11.10.2002)

Luentoaiheita: `L5maple.html, L6maple.html [TE], Lay`.

Alkuviikko (AV)

Muista: Maplen käyttö pienimuotoisiin laskutehtäviin käy aivan hyvin tekstitilassa modeemiyhteydellä. (Käynnistyskomento: `maple` .) Toisaalta AV-tehtävät mitoitetaan käsin kohtuudella laskettaviksi.

1. Kun tuotetaan signaali suorittamalla johonkin prosessiin kohdistuva sarja mittauksia, syntyy mittausvirheiden ym. johdosta satunnaista "kohinaa". (Prosessi voi liittyä kemialliseen reaktioon, lämpövirtaukseen putken läpi, liikkuvaan robotin käteen ym.) Standardi menetelmä on pyrkiä suodattamaan kohina signaalista. Eräs yksinkertainen suodatin on "liukuva keskiarvo", jossa muodostetaan mittaustuloksen keskiarvo sen molempien naapureiden kanssa. Jos mittaustuloksia edustaa jono (y_k), niin muodostetaan jono $z_k = \frac{y_{k-1}}{3} + \frac{y_k}{3} + \frac{y_{k+1}}{3}$.

   Olkoon signaali $(y_k) = 9, 5, 7, 3, 2, 4, 6, 5, 7, 6, 8, 10, 9, 5, 7$.

   Laske suodatettu signaali $z_k, k = 1 \ldots 13$.

   Piirrä murtoviivat, jotka edustavat alkuperäistä ja suodatettua signaalia.

   Jaksanet piirtää käsin ruutupaperille, toki Maplea saa myös käyttää mielellään.

2. Tämä tehtävä käsittelee yksinkertaista kansantalousmallia, jota kuvataan differenssiyhtälöllä

   $$Y_{k+2} - a(1 + b)Y_{k+1} + abY_k = 1.$$

   Tässä Y_k on kokonaiskansantuote vuoden k aikana, $a < 1$ on vakio ("the marginal propensity to consume"), ja $b > 0$ on säätöparametri, joka kuvaa sitä, miten muutokset kuluttajien käyttäytymisessä vaikuttavat vuotuiseen sijoitustoimintaan yksityisellä sektorilla.

   Määritä yhtälön yleinen ratkaisu, kun $a = 0.9$ ja $b = \frac{4}{9}$. Mitä tapahtuu Y_k:lle, kun k kasvaa?

   Vihje: Koska oikea puoli on vakio, (EHY):n erityisratkaisua kannattaa etsiä muodossa $Y_k^p = T$ =vakio. (Jos vakio olisi (HY):n ratkaisu, niin tämä ei toimisi,mutta näin ei taida olla.) Määräytyvää vakiota kutsutaan kansantulon tasapainotasoksi. [1]

3. Sovitaan, että kunakin päivänä opiskelija on joko terve tai sairas (ei siis siltä väliltä). Niistä oppilaista, jotka ovat tänään terveitä, 95% on terveitä huomenna. Tänään sairastavista oppilaista 55% sairastaa myös huomenna.

   (a) Kirjoita tähän "kokeeseen" liittyvä stokastinen matriisi.

   (b) Oletetaan, että 20% oppilaista on sairaana maanantaina. Mikä osuus oppilaista on tämän mallin mukaan sairaana tiistaina ja mikä keskiviikkona.

   (c) Jos oppilas on terve tänään, millä todennäköisyydellä hän on terve kahden päivän päästä?

4. Osoita, että jos n:nnen kertaluvun lineaarisen homogeenisen differenssiyhtälön karakteristisen yhtälön ("auxiliary equation") juuret $r_1, \ldots, r_n$ ovat yksinkertaiset (eli kaikki keskenään erilliset), niin jonot $(r_1^k)_k, \ldots, (r_n^k)_k$ muodostavat ratkaisuavaruuden kannan.

5. Laske `L6maple`-tiedoston äänestysmatriisin tasapainotilavektori. (Käsinlasku lienee ihan kohtuullinen, Maplea saa toki käyttää.)

6. Olkoon P stokastinen matriisi ($p_{i,j} \geq 0$, sarakesummat = 1). Osoita, että P:llä on ei-triviaali kiintopiste (eli tasapainotilavektori, TP-vektori), ts. vektori $\mathbf{x}$, siten että $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

   Vihje tutki matriisia $P - I$, missä I on yksikkömatriisi. Osoita vaikka, että rivit ovat `LRT` tai muuta sopivaa.

   Vapaaehtoinen lisäpohdinta: Liekö helppoa vai vaikeaa osoittaa, että saadaan todennäköisyysvektori. Tämä onnistuu sillä edellytyksellä, että voidaan osoittaa, että TP-vektorin alkiot ≥ 0 (jokin aidosti).

Loppuviikko (LV)

1. Jatka AV-kansantalousmallin parissa. Ratkaise AV-tehtävä Maplella käyttäen mallina `L5maple.mws`:ää. Vaihda sitten parametreja:

[1] Viittaus: *Sandefur*: Discrete dynamical systems ss. 267–276. Jos joku haluaa tutkia tarkemmin, minulta saa kirjan lainaksi

$a = 0.9, \quad b = 0.5$

Piirrä Y_k-pisteitä usean vuoden ajalta ja niitä yhdistävät murtoviivat. (Malleja on noissa `L*maple.mws`-tiedostoissa. Tässä pääsääntö: Data, joka `plot`:lle tarjoillaan, on muotoa `[[t1,y1],[t2,y2],...]` , yhdistävät murtoviivat tulevat oletuksena mukaan, mikä on ihan hyvä. Datan generointiin `seq` on hyvä väline.)

2. (a) Kirjoita differenssiyhtälö

$$y_{k+4} - 6y_{k+3} + 8y_{k+2} + 6y_{k+1} - 9y_k = 0$$

systeemiksi muotoon $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k, \forall k.$

(b) Muodosta jonoa $\mathbf{x_k}$ jonkin matkaa iteroimalla matriisiyhtälöä ja toisaalta myös laskemalla suoraan differenssiyhtälöstä ja vertaa.

(c) Piirrä myös $[k, y_k]$- murtoviiva.

3. Ratkaise edellisen tehtävän differenssiyhtälö. Kokeile $k3^k$-yritettä kaksoisjuurelle.

4. Jatka AV tehtävää terveistä/sairaista oppilaista.

(a) määritä tasapainotilavektori (TP-vektori)

(b) Millä todennäköisyydellä tietty oppilas on sairas, kun monta päivää on kulunut. Onko sillä merkitystä, onko hän sairas vai terve tänään.

5. Tutki säännöllisten stokastisten matriisien potensseja:

(a) Olkoon

$$P = \begin{bmatrix} 0.3355 & 0.3682 & 0.3067 & 0.0389 \\ 0.2663 & 0.2723 & 0.3277 & 0.5451 \\ 0.1935 & 0.1502 & 0.1589 & 0.2395 \\ 0.2047 & 0.2093 & 0.2067 & 0.1765 \end{bmatrix}.$$

Muodosta matriisin P potensseja P^kja tarkkaile, mitä tapahtuu, kun k kasvaa. Laske P:n kiintopiste ("steady-state vector", TP-vektori) (TP : Tasapainotila)

(b) Olkoon

$$Q = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.05 & 0.10 \\ 0 & 0.90 & 0.05 \\ 0.03 & 0.05 & 0.85 \end{bmatrix}$$

.

Laske potenssit $Q^k, k = 10, 20, \ldots, 80$. Määritä Q:n TP-vektori. Suorita arvelu (konjektuuri), joka voisi pitää paikkansa kaikille säännöllisille stokastisille matriiseille.

6. Määritä differenssiyhtälösysteemin (teht. 2) matriisin A ominaisarvot ja -vektorit. Vertaa "karakteristisia yhtälöitä" (teht. 3) keskenään.