Teknillinen korkeakoulu — Apiola/Ebeling
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/02/H/`

Laskuharjoitus 11 (viikko 47 , 24 – 27.11.2002)

Lähteitä:
`KRE Ch 10, L/L16four.mws ja .html`

Alkuviikko (AV)

1. Muodosta 2π-jaksoisen funktion f Fourier-sarja, kun f on määritelty välillä $[-\pi, \pi]$ kuvan mukaisesti.

```
                         1 |----------------|
                           |                |
                           |                |
                           |                |
                           |                |
                           |                |
    |------------------------               -------------|
  -pi                       0               pi/2         pi
```

   (Ts. f on välin $[0, \pi/2]$ karakteristinen funktio rajoitettuna välille $[-\pi, \pi]$ ja jatkettuna 2π-jaksoisena koko $\mathbb{R}$:ään.)

   Piirrä samaan kuvaan funktio f ja hahmottele 3:n ensimmäisen osasumman kuvaaajat.

   Selvitä suppenemislauseen perusteella suppenemiskäyttäytyminen.

2. (a) Osoita, että summan f_1+f_2 Fourier-kertoimet ovat vastaavien Fourier-kertoimien summia ja vastaava asia cf:lle.

   (b) Ota lähtökohdaksi luennolla johdettu 2π-jaksoisen kanttiaallon Fourier-sarja. (`L/L16four.mws/html`)

   Muodosta tätä ja (a)-kohtaa sekä muuttujan skaalausta hyödyntäen (vrt. yleinen $p = 2L$-jaksoinen tapaus) *Heavisiden* funktion 2-jaksoisen jatkon Fourier-sarja, kun perusjaksovälinä on $[-1, 1]$. (L16four-ws:n merkinnöin ja funktioin kyseessä on funktio `JJ(u,-1..1)`).

   Evästys: Tarkoitus on, ettet laske yhtään integraalia.

3. (a) Osoita, että parillisten (vast. parittomien) funktioiden summa on parillinen (vast. pariton). Osoita, parittomuus/parillisuus kaikille (kolmelle) tulokombinaatiolle.

   (b) Osoita, että jokainen reaalifunktio voidaan kirjoittaa parillisen ja parittoman funktion summana. Vihje: Osoita ensin, että $f(x) + f(-x)$ on parillinen ja $f(x) - f(-x)$ on pariton.

   (c) Lausu funktio e^{ax} parittoman ja parillisen funktion summana.

4. Olkoon annettu funktio $f : [0, L] \to \mathbb{R}$. Funktio f voidaan jatkaa välille $[-L, L]$ joko parittomaksi tai parilliseksi (määrittelemällä $f(x) = \pm f(-x)$, kun $-L \leq x < 0$). Näin saatu funktio puolestaan jatketaan $2L$-jaksoiseksi koko $\mathbb{R}$:ään.

   Muodosta Fourier-kertoimien kaavat kummassakin tapauksessa lausumalla integraalit välin $[0, L]$ yli otettuina integraaleina.

   Näin olet tullut johtaneeksi kaavat ns. puolen jakson laajennuksille ("half range expansions"). Voit verrata kirjallisuuteen (KRE). (Parillisen kohdalla puhutaan kosinisarjasta ja parittoman taas sinisarjasta, eikä syyttä!)

5. Piirrä funktion $f(x) = x$, $0 < x < 4$ parillinen ja pariton laajennus ja näiden jaksolliset (jakso = 8) laajennukset välillä $[-8, 8]$.

   Muodosta edellisen Fourier-sarja, ja selvitä kummankin suppenemiskäytös. (LV-tehtävänä molemmat, sekä kuvat.)

6. Johda 2π-jaksoisen funktion Fourier-sarjan kompleksinen esitysmuoto suoraan osoittamalla ensin "kantafunktiot" e^{inx} ortogonaalisiksi ja menettelemällä siten, kuin ortogonaalisten kanssa aina menetellään. (Älä siis käytä reaalisille johdettuja kaavoja, vaan johda koko asia alusta pitäen (helpommin,elegantimmin, symmetrisemmin).)

Loppuviikko (LV)

1. Muodosta funktion $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$ Fourier-sarja kompleksimuodossa. (KRE[8] kaavat (8) s. 548 .)

   Piirrä f:n jaksollisen laajennuksen kuvaaja, sekä Fourier-osasummia.

   Laskemalla sarja sopivassa pisteessä osoita oikeaksi kaava
   $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Laske Maplella AV-tehtävän 5 (funktion $f(x) = x, 0 < x < 4$) puolen jakson laajennukset) molemmat sarjat. Piirrä osasummien kuvaajia muutaman jakson alueella ja myös yhden tai puolen jakson. Muista määritellä `osasumma`-funktio `L16four`:n tapaan.

3. Havainnollista Fourier- sarjojen suppemenemista ja Gibbs'n ilmiötä edellisen tehtävän sarjoilla. (n. 9%:n yli/aliampuminen hyppäyksen suuruudesta laskettuna).

   Piirrä kuvia ja laske arvoja, jotka havainnollistavat Gibbsin ilmiötä.

   Huomaa, että virhekäyttäytymistä ajatellen on usein havainnollista piirtää erotusfunktion $f(x) - s_N(x)$ kuvaajia, missä $s_N(x)$ on sarjan N:s osasumma.

   Esiintyykö ilmiötä siis jatkuvan funktion tapauksessa?

   Havinnollista myös osasummajonon suppenemista kiinnitetyssä pisteessä. Kuvien lisäksi voit muodostaa lukujonon valituissa x-pisteissä.

   Selitä (havainnollistavin kuvin), miksi sarjan suppeneminen ei ole ristiriidassa Gibbs'n ilmiön kanssa.

   Tästä on mahdollista kehittää opettavainen demoesitys. Ansiokkaista suorituksista ylimääräistä plussaa.

4. Määritä tasapainotilaratkaisu (”steady state”) yhtälölle $y''+cy'+y = r(t)$, $(c > 0)$, kun

$$r(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

   Vihje: Ota sarjan yleinen termi herätteeksi ja laske samanmuotoisen (EHY)-yritteen kertoimet. Lineaarisuuden (ulotettuna sarjoihin) nojalla ratkaisujen sarja on EHY:n ratkaisu. (Periaatetta esitellään KRE Exa 1:stä s. 551.)

5. (Tässä on ehkä tekemistä 2:n tehtävän verran, vaikka selvä malli onkin käytössä, em. KRE-esimerkki. Osasuorituksista saat myös hyvitystä.) Tarkastellaan vaimennettua värähtelyä kuvaavaa yhtälöä

   $my'' + cy' + ky = r(t)$.

   Olkoon $m = 1, c = 0.02, k = 25$ ja

$$r(t) = \begin{cases} \pi t/4, & -\pi/2 < t < \pi/2, \\ \pi(\pi - t)/4, & \pi/2 < t < 3\pi/2 \end{cases} \quad , \quad r(t + 2\pi) = r(t)$$

   .

   Määritä “pitkän aikavälin” (“steady state”) ratkaisu $y(t)$.

   Periaate (kuten edelläkin): Kehitetään $r(t)$ Fourier-sarjaksi. Etsitään kutakin sarjan termiä vastaten erityisratkaisua y_n muodossa $y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt$. Lineaarisuuden perusteella (jos/kun sarjan termeittäin derivoiminen on sallittua) päätellään, että $\sum y_n$ on yhtälön ratkaisu, kun herätteenä on koko alkuperäinen $r(t)$.

   Laske ainakin 5 termiä ratkaisusarjasta ja piirrä niiden summa sekä termit erikseen. Jokin niistä on ehkä dominoiva, identifioi se. Piirrä samaan kuvaan heräte $r(t)$ ja ”steady state”ratkaisu välillä $[0, 4\pi]$.

   Jos vielä jaksat, tutki, mitä tapahtuu, jos jousivakiolle annetaan arvo $k = 9$ sekä toisaalta jäykän jousen, vaikkapa $k = 49$ tapauksessa.

Fourier-kaavoja ja lauseita

Suppenemislause. Olkoon f jaksollinen funktio, jaksona T. Oletetaan, että f on paloittain jatkuva ja että sillä on kaikkialla sekä vasemman että oikeanpuoliset derivaatat. Tällöin f:n Fourier-sarja suppenee kaikissa pisteissä t kohti arvoa $\frac{1}{2}(f(t-) + f(t))$. Siten kaikissa pisteissä t, joissa f on jatkuva, sarja suppenee kohti funktion arvoa $f(t)$.

Huom 1 Vasemmanpuolinen derivaatta tarkoittaa tässä yhteydessä erotusosamäärän vasemmanpuolista raja-arvoa, kun laskentapisteenä on funktion vasemmanpuolinen raja-arvo. Oikeanpuolinen vastaavasti. Niinpä esim. Heavisiden funktiolla on origossa vp. ja op. derivaatta tässä mielessä = 0. ”Normaalin”puhetavan mukaan funktio olisi siten derivoituva ja erityisesti jatkuva 0:ssa, mikä viimeistään paljastaa, että puhetapamme on normaalista poikkeava.

Huom 2 Muitakin riittäviä ehtoja tunnetaan. Välttämättömia ja riittäviä ei tunneta.

Yleinen tapaus, f määritelty välillä $(-L, L)$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$

$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$